BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

BÙI MINH ĐỨC

DẠY HỌC HÌNH HỌC KHÔNG GIAN Ở TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VỚI SỰ HỖ TRỢ CỦA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

LUẬN ÁN TIẾN SĨ KHOA HỌC GIÁO DỤC

Chuyên ngành: Lý luận và Phương pháp dạy học bộ môn Toán
Mã số: 9140111

Năm 2018

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

DẠY HỌC HÌNH HỌC KHÔNG GIAN Ở TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VỚI SỰ HỖ TRỢ CỦA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

LUẬN ÁN TIẾN SĨ KHOA HỌC GIÁO DỤC

Chuyên ngành: Lý luận và Phương pháp dạy học bộ môn Toán
Mã số: 62 14 01 11

Người thực hiện: Bùi Minh Đức

Người hướng dẫn khoa học:
1) PGS. TS. Hoàng Lê Minh
2) PGS. TS. Trần Trung

Năm 2018

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi, các kết quả của luận án là trung thực và chưa từng được sử dụng để xét học vị lần nào.

Tác giả

Bùi Minh Đức

LỜI CẢM ƠN

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn đến các thầy, cô giáo hướng dẫn khoa học là PGS. TS. Hoàng Lê Minh và PGS. TS. Trần Trung, đã giúp đỡ, hướng dẫn tôi làm luận án.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban Giám hiệu Trường Đại học Sư phạm Hà Nội, Phòng Sau Đại học, Khoa Toán - Tin, Bộ môn Phương pháp dạy học, khoa Toán – Tin đã tạo mọi điều kiện cho tôi học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận án.

Tôi xin chân thành cảm ơn các thầy cô giáo và các em học sinh các trường thực nghiệm sư phạm, xin cảm ơn gia đình và bạn bè đã luôn giúp đỡ, động viên, khuyến khích tôi trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Tác giả

Bùi Minh Đức

BẢNG CÁC CHỮ VIẾT TẮT

Viết tắt	Viết đầy đủ
CNTT	Công nghệ thông tin
DH	Dạy học
ĐC	Đối chứng
ĐH	Đại học
ĐHSP	Đại học sư phạm
GTLN	Giá trị lớn nhất
GTNN	Giá trị nhỏ nhất
GV	Giáo viên
HH	Hình học
HHKG	Hình học không gian
HS	Học sinh
ICT	Công nghệ thông tin và truyền thông
KHGD	Khoa học giáo dục
MTĐT	Máy tính điện tử
NXB	Nhà xuất bản
PMDH	Phần mềm dạy học
PPDH	Phương pháp dạy học
SBT	Sách bài tập
SGK	Sách giáo khoa
TH	Trường hợp
THCS	Trung học cơ sở
THPT	Trung học phổ thông

TN	Thực nghiệm
TNSP	Thực nghiệm sư phạm
Tr/ tr	Trang/ trang

MỤC LỤC

Nội dung	Trang
MỞ ĐẦU	01
Chương 1. CƠ SỞ LÍ LUẬN VÀ THỰC TIỄN CỦA VIỆC DẠY HỌC HÌNH HỌC KHÔNG GIAN Ở TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VỚI SỰ HỖ TRỢ CỦA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN	09
1.1 Tổng quan về những công trình nghiên cứu liên quan đến luận án	09
1.1.1. Những công trình nghiên cứu về tác động của công nghệ thông tin đối với dạy học nói chung, đối với dạy học môn Toán nói riêng	09
1.1.2. Những công trình nghiên cứu về sử dụng phần mềm trong dạy học môn Toán nói chung, dạy học Hình học nói riêng	19
1.2. Chương trình Hình học không gian ở trường phổ thông Việt Nam và một số vấn đề liên quan đến dạy và học Hình học không gian	23
1.2.1. Chương trình Hình học không gian ở trường phổ thông và những khó khăn của HS khi học Hình học không gian	23
1.2.2. Vai trò của trí tưởng tượng không gian, tư duy trực quan và tư duy thị giác trong học tập Hình học không gian	26
1.2.3. Vai trò của việc học qua hành động trong học tập Hình học không gian	31
1.2.4. Phần mềm GeoGebra 5.0	33
1.3. Khảo sát thực trạng về sử dụng công nghệ thông tin trong dạy và học Hình học không gian ở trường Trung học phổ thông	35
1.3.1. Tổ chức khảo sát thực trạng	35
1.3.2. Kết quả khảo sát thực trạng	36
1.4. Kết luận chương 1	38

Chương 2. BIỆN PHÁP SỬ DỤNG PHẦN MỀM HÌNH HỌC ĐỘNG TRONG DẠY HỌC HÌNH HỌC KHÔNG GIAN 40
2.1. Định hướng xây dựng các biện pháp 40
2.2. Các biện pháp 43
2.2.1. Biện pháp 1. Sử dụng phần mềm hình học động để vẽ hình, hoặc tạo ra mô hình trực quan, mô hình phỏng thực tiễn giúp học sinh hiểu bài giảng 43
2.2.2. Biện pháp 2. Sử dụng phần mềm hình học động hỗ trợ giải toán quỹ tích hoặc hỗ trợ phát hiện yếu tố bất biến, yếu tố cần tìm trong bài toán Hình học không gian 55
2.2.3. Biện pháp 3. Sử dụng phần mềm hình học động hỗ trợ kiểm nghiệm các phán đoán và tìm kiếm trong dạy học giải toán Hình học không gian 67
2.2.4. Biện pháp 4. Sử dụng phần mềm hình học động hỗ trợ dạy học giải bài toán Hình học không gian bằng thủ pháp “trải hình” 93
2.3. Kết luận chương 2 115
Chương 3. THỰC NGHIỆM SƯ PHẠM 117
3.1. Mục đích và tổ chức thực nghiệm sư phạm 117
3.2. Giáo án thực nghiệm sư phạm 122
3.3. Đánh giá kết quả thực nghiệm sư phạm 131
3.4. Kết luận chương 3 148
KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ 149
DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH CÔNG BỐ CỦA TÁC GIẢ 151
TÀI LIỆU THAM KHẢO 153
PHỤ LỤC 165

DANH MỤC HÌNH VẼ

Nội dung	Trang
Hình 1. Tư duy thị giác	27
Hình 2. Tư duy không gian thuộc về bán cầu não phải	29
Hình 3. Mức độ ghi nhớ theo các hoạt động	32
Hình 4. Các cấp độ trong thang nhận thức của Bloom	32
Hình 5. Giao diện 3D của phần mềm GeoGebra 5.0 phiên bản tiếng Việt	34
Hình 6. Mặt trụ tròn xoay	47
Hình 7. Đường sinh của mặt trụ	48
Hình 8. Đường sinh mặt nón tiếp xúc với mặt cầu	49
Hình 9. Thiết diện là Elip, Parabol	50
Hình 10. Thiết diện là hypecbol	50
Hình 11. Thiết diện cônic vẽ bằng phần mềm GeoGebra	51
Hình 12. Thiết diện cônic vẽ bằng phần mềm Geometer's Sketchpad	51
Hình 13. Cốc nước hình trụ đặt nghiêng sẽ có mặt nước hình elip	52
Hình 14. Chia thể tích khối lập phương thành thể tích 3 khối chóp bằng nhau	53
Hình 15. Ghép ba khối chóp bằng nhau ở trên ta được một khối lập phương	54
Hình 16. A'A và BC chéo nhau	54
Hình 17. Mặt hypecboloit	54
Hình 18. M thuộc đường tròn giao của hai mặt cầu	58
Hình 19. Tìm quỹ tích điểm H khi M chạy trên d	60
Hình 20. H thuộc giao của hai mặt	62
Hình 21. Quỹ tích của H khi (P) quay quanh d	64
Hình 22. Quỹ tích của H khi C di chuyển trên đường tròn	66
Hình 23. Tìm vị trí M để góc AMB lớn nhất	71
Hình 24. Cho M dịch dần vào OH	73
Hình 25. Một số dự đoán về điểm M	74
Hình 26. Kiểm nghiệm các vị trí của M theo dự đoán	75
Hình 27. Tìm vị trí đặc biệt của đường tròn qua A, M, B	76
Hình 28. Góc AMB nhỏ hơn góc AKP khi P thuộc đoạn AB	77
Hình 29. Góc AMB nhỏ hơn góc AKP khi P ở ngoài đoạn AB	77
Hình 30. Tìm vị trí điểm M để góc AMB lớn nhất	80

Hình 31. Kiểm nghiệm các dự đoán 81
Hình 32. Tìm điểm M thuộc đường tròn để góc AMB lớn nhất. 83
Hình 33. Góc AMB lớn nhất khi đường tròn (AMB) tiếp xúc với đường tròn (C) 84
Hình 34. Tìm điểm M thuộc mặt phẳng (p) để MA + MB nhỏ nhất 85
Hình 35. M càng gần OH thì AM + MB càng nhỏ 87
Hình 36. Tìm M trên OH để T_M = MA + MB nhỏ nhất 88
Hình 37. Tìm M thuộc d để $T_M = MA + MB$ nhỏ nhất 89
Hình 38. Quy về bài toán quen thuộc 90
Hình 39. M di chuyển trên d 91
Hình 40. Thủ pháp cắt ghép hình 93
Hình 41. Thiết diện là hình bình hành *AIGJ* 96
Hình 42. Trải mặt này lên mặt kia 97
Hình 43. AI + IG nhỏ nhất khi ba điểm A, I, O thẳng hàng 97
Hình 44. Thiết diện là *ABGH* 98
Hình 45. Thiết diện là *AFGD* 98
Hình 46. TH2 của thiết diện 99
Hình 47. TH3 của thiết diện 99
Hình 48. Tìm M, N để chu vi ΔCMN nhỏ nhất 100
Hình 49. Trải hai mặt hình chóp lên mặt phẳng mặt còn lại 102
Hình 50. Khi độ dài DMNE bằng đoạn DE thì ngắn nhất 102
Hình 51. Diện tích toàn phần A_1AMN không đổi 103
Hình 52. Diện tích toàn phần của tứ diện A_1AMN không đổi 106
Hình 53. 4 mặt tứ diện A_1AMN ghép lại thành hình vuông 106
Hình 54. Thiết diện qua M và vuông góc với AC_1 107
Hình 55. Các phương pháp khai triển một hình lập phương 108
Hình 56. Trải các mặt hình lập phương lên mặt phẳng, chu vi thiết diện bằng ba đoạn đường chéo hình vuông 109
Hình 57. Trải ba mặt bên hình chóp lên mặt đáy 111
Hình 58. Tìm điểm M trên d sao cho MA + MB nhỏ nhất 113
Hình 59. MA + MB nhỏ nhất khi A, M, B’ thẳng hàng 113
Hình 60. Quay cho hai mặt phẳng trùng nhau 114

DANH MỤC BẢNG

Nội dung	**Trang**
Bảng 1: Khi y(M) dần tới 0, góc AMB nhỏ dần	73
Bảng 2. Giá trị góc AMB thay đổi	82
Bảng 3. Giá trị của T_M = MA + MB	87
Bảng 4. Các giá trị T_M	88
Bảng 5: Các giá trị của tổng MA + MB khi M di chuyển trên d	92

MỞ ĐẦU

1. Lí do chọn đề tài

Đề tài được chúng tôi lựa chọn với những lí do sau:

+ Lí do 1: *Sử dụng Công nghệ thông tin (CNTT) trong dạy học (DH) nói chung, trong DH môn Toán nói riêng đã và đang được các quốc gia quan tâm, khuyến khích nghiên cứu, áp dụng nhiều hơn nữa*.

Vào những năm cuối của thế kỉ XX, CNTT đã thể hiện được vai trò và tầm quan trọng của nó trong mỗi lĩnh vực của đời sống, xã hội. Bước sang thế kỉ XXI, CNTT ngày càng phát triển hơn và ngày càng được áp dụng nhiều hơn trong GD. Theo Daniels J. S. (2002) trong một thời gian rất ngắn CNTT đã trở thành một trong những nền tảng cơ bản của xã hội hiện đại. Nhiều quốc gia coi sự hiểu biết CNTT và việc làm chủ các kĩ năng cơ bản về CNTT như là một phần cốt lõi của giáo dục. [62]

Sự phát triển mạnh mẽ của hệ thống mạng toàn cầu Internet đã và đang làm thay đổi cách con người tiếp cận tri thức: Con người không chỉ học tập với nguồn thông tin duy nhất từ người đã biết đến người chưa biết, không chỉ đọc để biết, mà còn học tập với nhiều nguồn thông tin, có thể nghe, nhìn, cảm nhận các sự kiện xảy ra trên thế giới ngay trong tầm tay của mình. Sự phát triển nhanh chóng của công nghệ những thập niên cuối thế kỷ XX đến nay đã tạo ra một khối lượng thông tin khổng lồ, vậy không thể chờ đợi sự ban bố tri thức theo PPDH truyền thống, mà người học phải *có* khả năng tìm kiếm, thu thập và xử lý thông tin. Chính vì vậy, việc sử dụng CNTT trong DH nói chung, trong DH môn Toán nói riêng đang được sự quan tâm, khuyến khích của các quốc gia.

Tại Seoul Hàn Quốc vào ngày 11 và 12 tháng 5 năm 2017 đã diễn ra Diễn đàn Bộ trưởng các nước Châu Á - Thái Bình Dương về Giáo dục và Truyền thông (APFIE), với chủ đề "Định hình việc học hỏi suốt đời vì sự trợ giúp của CNTT và truyền thông". Diễn đàn đã tập hợp các chuyên gia quốc tế

và các nhà hoạch định chính sách giáo dục trong khu vực để xem xét và tinh chỉnh vai trò của công nghệ cho các nước thành viên Châu Á - Thái Bình Dương trong việc đạt được chương trình giáo dục 2030.

Tại Việt Nam, đã có nhiều hội nghị, hội thảo về ứng dụng CNTT trong giáo dục nói chung, trong DH môn Toán nói riêng. Chẳng hạn như: Hội thảo khoa học "Sử dụng CNTT trong đổi mới PPDH", tại Hà Nội năm 2002; Hội thảo quốc gia về "Chủ đề E-learning" tại Hà Nội năm 2005; Hội thảo quốc gia "Ứng dụng CNTT trong GD" tại Hà Nội năm 2008; Hội thảo "Ứng dụng hiệu quả CNTT trong quản lý và điều hành ngành giáo dục thủ đô Hà Nội" năm 2010; Hội thảo "Ứng dụng công nghệ thông tin trong giáo dục và đào tạo thành phố Cần thơ" năm 2011; Hội thảo "Ứng dụng CNTT trong hoạt động giáo dục và DH" tại Đà Nẵng năm 2014; Hội thảo "Ứng dụng Công nghệ thông tin trong ngành giáo dục tại Quảng Nam" tháng 3 năm 2017….

Có thể thấy tất cả các quốc gia đều quan tâm, khuyến khích nghiên cứu, áp dụng CNTT vào GD.

+ Lí do 2: *Đã có nhiều công trình công bố về sử dụng CNTT trong DH môn Toán, nhưng do nhu cầu vẫn cần những kết quả nghiên cứu mới có thể vận dụng được một cách hiệu quả ở trường phổ thông*.

Đã có không ít công trình nghiên cứu sử dụng CNTT trong DH môn Toán ở tầm vĩ mô. Những nghiên cứu này đã đi đến kết luận: CNTT có thể tạo ra những môi trường học tập mới, như E-learning, tự học với máy tính, DH trên truyền hình, DH theo dự án, DH hợp tác; CNTT cũng mở ra triển vọng to lớn trong việc đổi mới các PP và hình thức DH như DH theo PP tiếp cận kiến tạo, PPDH phát hiện và giải quyết vấn đề, PP học khám phá….

Trong phạm vi lớp học, nhờ đa phương tiện (multimedia) như: văn bản (text), đồ họa (graphic), hình ảnh (image), âm thanh (sound), phim (video)… GV có thể xây dựng được những bài giảng sinh động, thu hút sự tập trung chú ý của HS.

Vai trò của CNTT trong DH môn Toán ngày càng thể hiện rõ nét hơn ở những điểm sau: CNTT giúp cho HS cảm nhận được nhiều hơn, học tập hiệu quả hơn so với 45 phút giảng dạy do GV thuyết trình, giảng giải như trước đây. GV có thể làm cho bài giảng của mình trở nên hấp dẫn và sống động hơn bằng cách sử dụng đa phương tiện.

Về cơ sở vật chất: Hiện nay các trường phổ thông đều trang bị phòng máy, phòng đa năng, nối mạng Internet và Tin học được giảng dạy chính thức, một số trường còn trang bị thêm các thiết bị ghi âm, chụp hình, quay phim (Sound Recorder, Camera, Camcorder), máy quét hình (Scanner) và một số thiết bị khác, tạo cơ sở hạ tầng CNTT cho GV sử dụng vào quá trình DH của mình. Đó chính là những điều kiện thuận lợi cho việc ứng dụng CNTT trong dạy và học ở trường phổ thông.

+ *Lí do 3*: *HHKG là một phân môn thuộc loại khó dạy và khó học ở trường phổ thông, cần thiết phải có những công trình nghiên cứu nhằm khắc phục những khó khăn, trở ngại trong dạy và học HHKG, trong đó hướng nghiên cứu sử dụng phần mềm HH động trong DH HHKG là một hướng nghiên cứu đúng đắn phục vụ cho mục đích đó*.

Trong chương trình môn Toán ở trường THPT, nội dung về HHKG là một trong những nội dung khó dạy và khó học, bởi việc học tập nghiên cứu HHKG dựa trên hình biểu diễn của các hình không gian trên mặt phẳng hình chiếu. Có những quan hệ của các đối tượng trong không gian như quan hệ song song, quan hệ vuông góc không thể thấy được trên hình biểu diễn, bởi hai đường thẳng song song trong không gian có thể có hình biểu diễn trên mặt phẳng là hai đường thẳng trùng nhau; góc vuông trong không gian có thể có hình biểu diễn trên mặt phẳng là một góc bất kì. Chính vì vậy, khi chuyển từ hình học phẳng sang HHKG, tư duy của học sinh sẽ chuyển từ tư duy trực giác sang tư duy trừu tượng. Khó khăn này có thể được khắc phục nếu có sự hỗ trợ của các phần mềm hình học động.

Một trong những khó khăn, trở ngại không nhỏ đối với GV và HS trong dạy và học HHKG là vẽ hình (biểu diễn hình). Nếu chỉ dùng phấn, bảng của một lớp học thông thường thì rất khó để có thể vẽ được trong một thời gian hạn chế các trường hợp thiết diện của hình lập phương cắt bởi mặt phẳng qua một đường chéo của nó. Song nếu có sự hỗ trợ của phần mềm Hình học động, công việc này hoàn toàn có thể thực hiện được. Hơn nữa, ta còn có thể xoay hình, nhìn hình, nghiên cứu hình theo nhiều góc độ khác nhau. Nếu khai thác tốt các tính năng của các phần mềm hình học động, cùng với việc vận dụng những phương pháp DH tích cực, sẽ đem lại hiệu quả cao trong một số tình huống DH HHKG.

Ngày nay, công nghệ phần mềm đã phát triển rất mạnh, trong đó các phần mềm giáo dục cũng đạt được những thành tựu đáng kể như: bộ Office, Cabri, Crocodile, SketchPad/Geomaster SketchPad, Maple/Mathematica, ChemWin, LessonEditor/VioLet, hệ thống World wide web (WWW), E-learning và các phần mềm đóng gói khác.

Hiện nay có không ít những phần mềm HH động hỗ trợ DH HHKG ở trường phổ thông, chẳng hạn như Cabri 3D, Geometer's Sketchpad, GeoSpace, GeoGebra .... Tuy nhiên chúng tôi lựa chọn, sử dụng phần mềm GeoGebra vì đây là phần mềm miễn phí (free), dễ sử dụng, tương thích với nhiều hệ điều hành.

Từ những lí do trên đề tài được chọn là: *DH HHKG ở trường THPT với sự hỗ trợ của CNTT*.

2. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu

2.1. Mục đích nghiên cứu

Mục đích nghiên cứu là đề xuất được một số biện pháp sử dụng công nghệ thông tin trong dạy học Hình học không gian, thông qua một số tình huống dạy học, để bổ sung cho lí luận và phương pháp dạy học bộ môn Toán,

góp phần giảm bớt khó khăn, hỗ trợ dạy học và giải toán Hình học không gian ở trường Trung học phổ thông.

2.2. Nhiệm vụ nghiên cứu:

Để đạt được mục tiêu trên, nhiệm vụ của đề tài là trả lời các câu hỏi khoa học sau đây:

(1) Tình hình chung về các kết quả nghiên cứu theo hướng sử dụng CNTT trong DH môn Toán ở trong và ngoài nước cho đến nay như thế nào và CNTT đem lại những lợi ích gì cho việc DH môn Toán nói chung và DH HHKG nói riêng ở trường THPT ?

(2) Cơ sở khoa học và thực tiễn của việc sử dụng CNTT trong DH môn Toán nói chung và DH HHKG nói riêng ở trường THPT là gì ?

(3) Những biện pháp sử dụng CNTT trong DH HHKG nào có thể đề xuất để hỗ trợ DH và giải toán HHKG ở trường THPT.

3. Giả thuyết khoa học

Nếu đề xuất được những biện pháp sử dụng CNTT trong DH HHKG thông qua một số tình huống DH cụ thể, trong đó thể hiện rõ cách thức sử dụng phần mềm hình học động, phương pháp dạy học và áp dụng được những biện pháp đó vào thực tiễn DH thì sẽ góp phần giảm bớt những khó khăn, hỗ trợ DH và giải toán HHKG ở trường THPT.

4. Phương pháp nghiên cứu

4.1. Nghiên cứu lí luận

- Dựa vào những tài liệu, những kết quả nghiên cứu của Tâm lí học, Giáo dục học, liên quan đến đề tài, để tìm câu trả lời cho các câu hỏi nghiên cứu.
- Nghiên cứu những thuật ngữ, lí luận liên quan đến vấn đề nghiên cứu: CNTT, Sử dụng CNTT trong dạy và học môn Toán ...

- Tổng hợp, phân tích các công trình nghiên cứu đã có của các tác giả trong và ngoài nước liên quan mật thiết đến đề tài luận án, để thấy được đóng góp mới của luận án.

4.2. Khảo sát thực tiễn

Phương pháp Khảo sát thực tiễn của chúng tôi dựa trên ba loại phiếu khảo sát: Phiếu khảo sát chung để nắm được tình hình khái quát về DH Toán với sự hỗ trợ của CNTT; Phiếu khảo sát GV, HS thông qua việc giải những bài toán cụ thể hoặc dự đoán kết quả bài toán (nếu không giải được) để có cơ sở thực tiễn cho mỗi biện pháp; Phiếu khảo sát từ GV, HS về tính hiệu quả và khả thi của những giáo án thực nghiệm sư phạm (TNSP).

4.3. Nghiên cứu trường hợp

Lập kế hoạch nghiên cứu, theo dõi sự phát triển năng lực học tập HHKG của một nhóm học sinh, trong một khoảng thời gian, thông qua tác động của một hoặc một số biện pháp trong luận án; Từ đó rút ra những bài học kinh nghiệm để chỉnh sửa biện pháp cho phù hợp.

4.4. Thực nghiệm sư phạm

Tiến hành TNSP tại một số trường thuộc một số tỉnh, thành phố (Hà Nội, Hải Phòng, Hải Dương, Huế, Sơn La) để đánh giá tính khả thi và hiệu quả của những tình huống DH có ứng dụng CNTT, thông qua những bài toán đã được đề xuất trong chương 2.

5. Đối tượng nghiên cứu và phạm vi nghiên cứu

5.1. Đối tượng nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu là những biện pháp sử dụng phần mềm GeoGebra trong quá trình DH HHKG.

5.2. Phạm vi nghiên cứu

Phạm vi nghiên cứu là những tình huống DH giải toán HHKG với sự hỗ trợ của phần mềm GeoGebra 5.0.

6. Cấu trúc luận án

Ngoài phần Mở đầu, Kết luận, luận án gồm ba chương:

Chương 1. Cơ sở lí luận và thực tiễn của việc dạy học hình học không gian ở trường trung học phổ thông với sự hỗ trợ của công nghệ thông tin

Chương 2. Biện pháp sử dụng phần mềm hình học động trong DH HHKG

Chương 3. Thực nghiệm sư phạm

7. Những đóng góp mới của luận án

7.1. Về lí luận

- Tổng quan về việc sử dụng CNTT trong DH môn Toán nói chung, sử dụng phần mềm hình học động trong DH HHKG nói riêng.
- Đề xuất được một số biện pháp sử dụng phần mềm hình học động trong DH HHKG góp phần bổ sung cho lí luận DH môn Toán.

7.2. Về thực tiễn

- Phản ánh được một phần thực trạng dạy và học môn Toán có sử dụng CNTT ở trường THPT.
- Có thể áp dụng các biện pháp đã đề xuất trong luận án vào thực tiễn DH HHKG ở trường THPT, góp phần giảm bớt những khó khăn và nâng cao hiệu quả dạy và học HHKG.

8. Những vấn đề đưa ra bảo vệ

8.1. Việc khai thác và sử dụng CNTT trong DH môn Toán nói chung, DH HHKG nói riêng có cơ sở khoa học và thực tiễn.

8.2. Những biện pháp đã đề xuất trong chương II có tính mới, góp phần bổ sung cho lí luận và có giá trị thực tiễn.

8.3. Những giáo án TNSP trong chương III có tính khả thi và hiệu quả, giả thuyết khoa học chấp nhận được.

9. Một số thuật ngữ then chốt trong luận án

(1) Công nghệ thông tin (CNTT) và sử dụng CNTT

CNTT là việc nghiên cứu hoặc sử dụng thiết bị điện tử, đặc biệt là máy vi tính, để lưu giữ, phân tích và gửi thông tin (Daintith, John, ed, 2009) [63], tr. 666].

Sử dụng CNTT được hiểu là sử dụng máy tính và phần mềm máy tính để chuyển đổi, lưu trữ, bảo vệ, xử lý, truyền tải và thu thập thông tin.

(2) Phần mềm, phần mềm dạy học (PMDH), phần mềm hình học động

Phần mềm (phần mềm máy tính) được hiểu là một tập hợp các câu lệnh hoặc chỉ thị được viết bằng một hoặc nhiều ngôn ngữ lập trình theo một trật tự xác định nhằm tạo ra một nhiệm vụ hay chức năng hoặc một vấn đề cụ thể nào đó. Phần mềm bao gồm các chương trình và các thông tin điều hành được sử dụng bởi máy tính.

PMDH là phần mềm phục vụ một yêu cầu nào đó về nội dung hoặc phương pháp DH theo các mục tiêu DH.

Phần mềm hình học động là phần mềm có chức năng vẽ các hình, các khối trong mặt phẳng hoặc trong không gian; đồng thời có tính năng bảo tồn các quan hệ giữa các đối tượng, có tính năng di động và tạo vết.

(3) Tình huống, tình huống dạy học

Một tình huống được hiểu là một hệ thống phức tạp gồm chủ thể và khách thể, trong đó chủ thể là con người, khách thể lại là một hệ thống nào đó.

Một tình huống dạy học - tình huống trong DH được hiểu là một bối cảnh DH, ứng với một khoảng thời gian và không gian nhất định ở lớp học, trong đó có các hoạt động của thầy và trò nhằm thực hiện một mục tiêu DH.

(4) Mô hình

Mô hình là một vật hay một hệ thống vật đóng vai trò đại diện hoặc thay thế cho vật hay hệ thống vật mà ta quan tâm nghiên cứu. Mô hình trực quan, mô hình phỏng thực tiễn sẽ hỗ trợ cho việc nghiên cứu không cần phải quan sát hình thật hoặc có mặt trong thực tiễn.

(5) Tư duy trực quan, tư duy thị giác

Tư duy trực quan là loại hình tư duy thông qua các giác quan hoặc dựa vào hình ảnh trong đầu để nhận thức và giải quyết vấn đề.

Tư duy thị giác, còn được gọi là tư duy hình ảnh, là hiện tượng tư duy thông qua xử lý hình ảnh.

Chương 1

CƠ SỞ LÍ LUẬN VÀ THỰC TIỄN CỦA VIỆC DẠY HỌC HÌNH HỌC KHÔNG GIAN Ở TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VỚI SỰ HỖ TRỢ CỦA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

1.1. Tổng quan về những công trình nghiên cứu liên quan đến luận án

1.1.1. Những công trình nghiên cứu về tác động của công nghệ thông tin đối với dạy học nói chung, đối với dạy học môn Toán nói riêng

1.1.1.1. *Trên thế giới*

Những công trình trên thế giới nghiên cứu về tác động của CNTT đối với DH có khá nhiều. Phát biểu về tác động của CNTT đối với DH (sau những kết quả nghiên cứu) có thể kể đến các nhận định sau: CNTT đã trở thành công cụ thúc đẩy nhận thức và kết quả học tập của HS, CNTT cho phép tạo ra tình huống học tập và thực hành (Barron,1998 [57][56], Berge, 1998 [57]). Việc sử dụng thích hợp CNTT có thể làm xúc tác cho sự thay đổi cả về nội dung và PPDH trong thế kỉ XXI (Kulik, 1994) [84]; CNTT cho phép người học nhiều cơ hội khám phá hơn việc chỉ lắng nghe và ghi nhớ; CNTT giúp HS dễ dàng thông tin liên lạc với các GV (Valasidou và Bousiou, 2005) [100]; CNTT có thể giúp HS mở rộng và hiểu sâu sắc hơn nội dung kiến thức và hỗ trợ phát triển các kĩ năng tư duy cho HS (Kozma, 2005 [81], Kulik, 2003 [83], Webb và Cox (2004)[108].

R. N. Ronau và các đồng nghiệp (2014) [94] đã đưa ra nhận định: Trong bốn thập kỷ qua, những kết quả nghiên cứu đều thống nhất rằng các công nghệ kỹ thuật số như máy tính và phần mềm máy tính nâng cao sự hiểu biết của HS và không làm giảm đến kỹ năng tính toán của HS.

Tổ chức Hợp tác và Phát triển Kinh tế (OECD - Organization for Economic Co-operation and Development) năm 2015 đã có kết luận: Chúng ta có thể sử dụng CNTT trong dạy và học qua các hình thức: DH dựa vào máy tính (CBT - Computer Base Training), học trực tuyến (online), e-learning, sử dụng các bài giảng điện tử, sử dụng một số phần mềm thông dụng trong chuẩn bị bài soạn như: Microsoft Word, Microsoft Excel; sử dụng một số phần mềm hỗ trợ DH: Microsoft Outlook, Adobe Photoshop, Microsoft Powerpoint; sử dụng một số phần mềm đánh giá kết quả học tập của HS: Violet, Macromedia Flash…. Chúng ta có thể sử dụng Internet trong việc tìm kiếm các thông tin trực tuyến; Kết quả khảo sát từ một số địa phương đã cho chúng ta những bằng chứng chắc chắn rằng những HS sử dụng máy tính nhiều sẽ có điểm số tốt hơn trong học Toán và đọc sách. [92]

Theo Yerushalmy M. và Botzer G. (2011) [104]: Trong một lớp học có sử dụng CNTT, GV đóng vai trò then chốt trong việc tạo ra các bài học hiệu quả. Các công trình của Drijvers P., Doorman M. , Boon P., Reed H. và Gravemeijer K. (2010) [65], Guin và Trouche (1999) [69], Trouche (2004) [98] đều nhắc tới vấn đề cần phải phát triển tư duy thuật toán thông qua CNTT cho HS, bài học phải bao gồm các hoạt động và nhiệm vụ kích thích tư duy.

Một số công trình khác quan tâm đến tác động của CNTT đối với dạy và học. Sinclair N. và Yurita V. (2008) [95] cho rằng CNTT có thể tạo cơ hội cho HS sử dụng các biểu diễn động; Theo William J. và Goos M. (2013) [109]: Các mô hình toán học có thể hỗ trợ khám phá, tìm tòi các tri thức; Theo

Woo Y. và Reeves T. C. (2006) [110]: CNTT ngày càng đáp ứng tốt hơn các nhu cầu cá nhân, phù hợp với năng lực nhận thức của mỗi HS.

Các kết quả nghiên cứu của Müller và Falcke D. (2006) [89], Wang Q. và Woo H. L. (2007) [105], Hirtz S. ; Harper D. G. và Mackenzie S. (2008) [76], Brown T. H. (2005)[60], Toure K. (2009)[99], đã cho thấy: Nhờ có CNTT, HS có thể dễ dàng tiếp cận thông tin hơn, suy nghĩ của họ được tăng cường và phát triển mang đậm tính cá nhân hơn, khả năng làm việc độc lập cũng được phát triển. Học sinh biết cách tiếp cận kiến thức và kĩ năng học tập hợp tác được thúc đẩy.

Nghiên cứu của Bidarian S. và Davoudi A. M. (2011) đã chỉ ra rằng: Các công cụ CNTT đã tạo cơ hội cho nhiều người tham gia vào quá trình giáo dục: các nhà quản lí, các nhà giáo, các nhà nghiên cứu, cha mẹ HS … bởi CNTT đã tạo ra sự đa dạng văn hóa, xã hội và những ảnh hưởng mà nó mang lại; Việc bổ sung các kiến thức cũng cần được quan tâm do sự phát triển không ngừng của khoa học kĩ thuật và sự toàn cầu hóa; những kĩ năng sống cơ bản và sự đa dạng của các nguồn tài nguyên giáo dục ngày càng phong phú. Với sự phát triển của CNTT, người ta nghĩ đến nhiều hình thức, nhiều dạng tổ chức lớp học. Quá trình giáo dục không chỉ giới hạn ở trong phạm vi lớp học và không bị gián đoạn khi ra ngoài lớp học nữa. Việc sử dụng CNTT có thể giúp đỡ rất nhiều HS có thể tự học ngoài lớp học, nếu họ hiểu được mục tiêu và kết quả mong đợi, có sự dẫn dắt, giúp đỡ, thúc đẩy của GV. Công nghệ làm cho môi trường học tập sinh động và sôi nổi hơn, bởi vì trong thời đại CNTT: máy tính, bảng tương tác, đa phương tiện, máy chiếu, các công cụ công nghệ, Internet v, v… đã tạo ra khả năng mới cho GV trong quá trình giảng dạy và cho HS trong quá trình học tập. CNTT cho phép truy cập đến các nguồn thông tin phi truyền thống, làm tăng hiệu quả của tự giáo dục, khuyến khích sáng tạo, và mang đến tính khả thi của các hình thức và phương pháp giáo dục mới. Mặc dù DH bằng cách sử dụng các công cụ CNTT đòi hỏi

ở GV những kĩ năng mới: Kĩ năng sử dụng máy tính, kĩ năng sử dụng công nghệ đa phương tiện và nhiều công việc khác chuẩn bị cho bài học, nhưng bù lại cho những điều đó là sự hứng thú, sự quan tâm của HS trong giờ học và những lợi ích do CNTT mang lại và sự thành công, hiệu quả hơn của bài dạy. [59]

Kết quả nghiên cứu của Aija Cunska và Inga Savicka (2012) cho thấy những lợi thế mà CNTT đem lại được thể hiện qua những điều sau đây:

- Truy cập rộng rãi thông tin: Truy cập vào những ý tưởng, quy trình, hoạt động mà không thể có được nếu không có công nghệ;
- Thay đổi trong quá trình giáo dục: HS được hoạt động học tập nhiều hơn, xử lý dữ liệu nhanh hơn, thời gian và địa điểm học tập không giới hạn;
- Tăng cường hợp tác, trao đổi kiến thức giữa các HS và GV;
- Tăng cường các vật liệu thực tế cho HS trong quá trình giáo dục;
- Hướng việc học vào cá nhân theo những năng lực khác nhau. [50]

Cũng theo tài liệu này, Aija Cunska và Inga Savicka (2012) cho rằng sử dụng CNTT trong bài học sẽ đem lại những lợi ích sau:

- Phát triển năng lực học tập của HS;
- Tăng cường DH hướng vào năng lực cá nhân: Mỗi HS có thể lựa chọn và hoàn thành những nhiệm vụ theo kiến thức và kỹ năng của bản thân;
- Giúp HS tự hoàn thành bài học với những tài nguyên mà GV và công nghệ giúp cho họ;
- Giúp HS hiểu ý nghĩa thiết thực của tri thức được học;
- Giúp GV cá thể hóa quá trình giáo dục;
- Quá trình giáo dục trở nên trực quan hơn, đầy màu sắc và hấp dẫn;
- Tạo cảm giác thoải mái cho HS (họ có thể học theo tốc độ của riêng mình và hợp tác với các HS khác);
- Tạo điều kiện để GV giám sát lớp học và chỉ đạo quá trình giáo dục thành công hơn;

- Không cho phép GV đánh giá chủ quan kết quả nhận thức của HS;
- Giúp HS phát triển kiến thức của mình theo những gì họ đã có;
- Phát triển kỹ năng tự quản lý và tự đánh giá của HS;
- Giúp HS để giải quyết tình trạng khó xử do những khó khăn về những mặt khác nhau: học lực, thời gian, phương tiện, điều kiện…
- Giúp GV tăng "tính sư phạm" - năng lực sư phạm, vì những gì CNTT tạo cho họ, giúp họ dẫn dắt HS tiếp cận và giải quyết vấn đề trong quá trình DH. [50]

Theo Loeng Y. H. (2009) : Trong thế kỷ XXI, CNTT và học tập luôn đi liền với nhau. Sử dụng CNTT trong lớp học sẽ không là trở ngại nếu sử dụng những cách đơn giản sau đây:

- Sử dụng các thiết bị, như: Công nghệ điện toán đám mây (cloud technology), sử dụng điện thoại di động như một công cụ học tập để ghi chép, nghiên cứu thông tin do GV tạo ra để truy cập thông tin hoặc sử dụng e-mail và nhắn tin khi giao tiếp.
- Khai thác tài nguyên: Internet cho phép HS nghiên cứu hầu như bất kỳ chủ đề nào, so sánh nhiều quan điểm, kết nối với mọi người và mọi nền văn hóa khác nhau và hỗ trợ giải quyết vấn đề.
- Sử dụng các công cụ để tổ chức và quản lí dữ liệu, quản lí học tập (LMS - Learning Management Systems)
- Chia sẻ ý tưởng thông qua các diễn đàn (forum, blog…).
- Sử dụng để trình bày: Các biểu đồ, đồ họa, video thông qua các chương trình trình chiếu như PowerPoint, Captivate, Prezi…, sẽ làm tăng tính trực quan, hấp dẫn cho việc trình bày các bài thuyết trình, báo cáo….
- Sử dụng trong học hợp tác: CNTT có thể giúp cho các nhóm HS làm việc cùng nhau, dù họ có thể ở cách xa nhau.
- Sử dụng để quan sát, nghiên cứu thế giới thực (qua video, clip) hoặc qua mô phỏng.

- Sử dụng để tự học hoặc học tập chủ động hơn. [85]

Nhóm Didactic của Cộng hòa Pháp đã đi sâu vào việc nghiên cứu tích hợp nội dung học tập với những phương tiện sử dụng công nghệ như: điện thoại di động, máy tính bỏ túi, máy tính bảng… Chẳng hạn như công trình của Hamid Chachoua - Viện nghiên cứu LIG ĐH Joseph Fourier (2013) [11] về "Tích hợp ICT trong DH Toán"; công trình của Nguyễn Chí Thành (2008) tại Cộng hòa Pháp, với đề tài "Nghiên cứu didactic về việc giảng dạy các yếu tố thuật toán và lập trình trong DH Toán bậc trung học với sự giúp đỡ của máy tính bỏ túi" [42]. Tại Cộng hòa Liên bang Đức có công trình của Nguyễn Danh Nam (2012) [90] với đề tài "Hiểu về sự phát triển của quá trình chứng minh trong một môi trường hình học động"….

Về phương hướng và triển vọng của việc ứng dụng CNTT vào DH, UNESCO (2016) đã đề ra những hướng mới sử dụng CNTT trong giáo dục như sau:

(i) Tích hợp các file đa truyền thông

(ii) Tương tác

(iii) Sử dụng linh hoạt

(iv) Tính kết nối

(v) Hỗ trợ các phương pháp sư phạm mới

(vi) Tạo điều kiện cho hợp tác

(vii) Cố vấn trực tuyến. [111]

Các tác giả Drijvers P., Lynda Ball, Bärbel Barzel M., Kathleen Heid Yiming Cao, Michela Maschietto (2016) đã có một tầm nhìn về vai trò tiềm năng của CNTT trong DH Toán cho những năm 2025 như sau:

- HS có thể tiếp cận nội dung học tập thông qua nhiều loại thiết bị cá nhân, trong đó đã tích hợp công nghệ vào giáo dục toán học, để sử dụng trong hay

ngoài lớp học một cách dễ dàng. Chẳng hạn máy tính bảng, đồng hồ thông minh, điện thoại di động hoặc tương tự.

- HS sẽ sử dụng CNTT để tạo ra các đối tượng toán học 2D, 3D, cũng như sử dụng công nghệ để phân tích các đối tượng đó.
- HS dễ dàng tiếp cận các tập dữ liệu thống kê và các mô hình toán học khác nhau để khám phá ra những kết quả cần thiết. Ví dụ, HS có thể truy cập vào CNTT để khám phá các khía cạnh khác nhau của một đối tượng 3D bằng cách chia nó thành các phần, cắt ngang qua đối tượng, và mở lưới hoặc quay một đối tượng trong không gian.
- Các lớp học toán học trong tương lai có thể không cần giấy tờ và HS có quyền truy cập vào các thiết bị mà trên đó họ có thể dễ dàng ghi lại những tri thức toán học cần thiết. [64]

1.1.1.2. *Ở Việt Nam*

Tại Việt Nam đã có không ít những hội thảo, hội nghị về phát triển và sử dụng công nghệ DH trong đào tạo bồi dưỡng GV, như đã trình bày trong phần Mở đầu. Có thể thấy, mỗi năm ở Việt Nam đều có ít nhất một hội thảo quốc gia về ứng dụng CNTT trong giáo dục; các địa phương thay nhau tổ chức các hội nghị, hội thảo về ứng dụng CNTT trong DH ở các cấp học, bậc học, theo bốn mô hình DH với sự hỗ trợ của CNTT. Đó là: DH có hướng dẫn, DH phát hiện, DH kiểm nghiệm, DH trợ giúp.

Nguyễn Bá Kim (2004, 1988) [19], [18] và các học trò của ông về đưa một số yếu tố của Tin học vào nhà trường phổ thông từ những năm 80 của thế kỉ XX, thể hiện qua các luận án của Ouk Chieng (1989) [28]: "Xác định con đường đưa một số yếu tố tin học vào nhà trường Campuchia", Lê Khắc Thành (1993) [41]: "Tiếp cận hoạt động nhiều mặt trong DH lập trình ở nhà trường THPT", Đỗ Thị Hồng Anh (1993) [1]: "Xây dựng và sử dụng một phần mềm DH tiếp cận các phương pháp của trí tuệ nhân tạo để trợ giúp DH giải Toán về

hệ thức lượng trong tam giác"; Nguyễn Sĩ Đức (2002) [4]: "Xây dựng và sử dụng phần mềm DH hỗ trợ luyện tập môn Toán ở trường Tiểu học"….

Về những công trình nghiên cứu ứng dụng CNTT trong DH môn Toán ở Đại học, Cao Đẳng, có thể kể đến các luận án: "Ứng dụng máy tính vào DH Đại số tuyến tính nhằm tích cực hóa hoạt động nhận thức cho sinh viên Cao đẳng Sư phạm (Hoàng Thị Quỳnh Anh, 2006) [3], "Sử dụng đa phương tiện trong DH PPDH Toán ở trường ĐHSP (Hoàng Ngọc Anh, 2010) [2]; Luận án của Trần Trung năm 2009 "Ứng dụng CNTT và truyền thông hỗ trợ DH Hình học theo hướng tích cực hóa hoạt động nhận thức của HS dự bị Đại học dân tộc".

Trong những năm gần đây có một số nghiên cứu về những ứng dụng khác nhau của CNTT. Chẳng hạn như: Luận án của Nguyễn Đăng Minh Phúc năm 2008 về "Tích hợp các mô hình thao tác động với môi trường DH Toán điện tử nhằm nâng cao khả năng khám phá kiến thức mới của HS"; Luận án của Trịnh Thị Phương Thảo năm 2014 về "Khai thác một số ứng dụng trên điện thoại di động hỗ trợ HS lớp 12 THPT tự học"; Luận án của Nguyễn Chí Trung năm 2015 về "Phát triển tư duy thuật toán cho HS thông qua DH thuật toán ở trường THPT";

Có một số sách về ứng dụng CNTT trong DH môn Toán đã xuất bản. Trong đó có thể kể đến sách: "DH Hình học với sự hỗ trợ của phần mềm Cabri Geometry" của Nguyễn Bá Kim, Đào Thái Lai, Trịnh Thanh Hải (2008) [21], "Ứng dụng CNTT vào DH môn Toán ở trường phổ thông" của Trần Trung, Đặng Xuân Cương, Nguyễn Văn Hồng, Nguyễn Danh Nam (2011) [46].…

Về các đề tài nghiên cứu ứng dụng CNTT trong DH ở các trường phổ thông Việt Nam, có thể kể đến các đề tài: Đề tài trọng điểm cấp Bộ năm 2006 "Ứng dụng CNTT trong DH ở các trường phổ thông Việt Nam" do Đào Thái Lai làm chủ nhiệm; Đề tài trọng điểm cấp Bộ năm 2008 - 2010 "Tích hợp các

mô hình động với nghiên cứu bài học có trọng tâm tư duy toán để nâng cao nghiệp vụ sư phạm của GV" do Trần Vui là chủ nhiệm; Đề tài cấp ngành năm 2008 – 2010 "Dạy và học Toán qua mạng Internet với sự hỗ trợ của các mô hình động" do Nguyễn Đăng Minh Phúc làm chủ nhiệm; Đề tài cấp Bộ năm 2016 "Nghiên cứu vận dụng mô hình hóa trong DH môn Toán ở trường phổ thông" do Nguyên Danh Nam làm chủ nhiệm.

Đào Thái Lai (2006) [27] đã đi đến kết luận: CNTT đã có tác động mạnh mẽ tới mọi thành tố của quá trình DH; bao gồm mục tiêu DH, nội dung DH, PPDH, hình thức DH, phương tiện DH và kiểm tra đánh giá. Nguyễn Bá Kim (2004) [18] đã đưa ra các hình thức sử dụng MTĐT như một công cụ DH như sau: Sử dụng MTĐT để GV trình bày bài giảng, để tra cứu, tìm kiếm thông tin và tài nguyên phục vụ học tập; để trao đổi, giao lưu về nội dung học tập thông qua dịch vụ chat hoặc Email….

Theo Đào Thái Lai (2006): Dù cố gắng đến đâu chăng nữa thì trong điều kiện các đồ dùng, phương tiện DH truyền thống thì việc đảm bảo các nguyên tắc phân hoá trong DH toán vẫn bị hạn chế. Với MTĐT và PMDH, mỗi HS như có được một trợ giảng riêng luôn sẵn sàng giúp đỡ HS vượt qua các trở ngại tại mọi thời điểm cần thiết. Việc khai thác PMDH và Internet cũng đã nối dài cánh tay của người Thầy dạy toán đến từng gia đình, tới từng HS cụ thể và ngoài việc hướng dẫn HS học tập, công tác kiểm tra, đánh giá cũng được thực hiện ngay tại chỗ. MTĐT với các phần mềm cho phép GV, HS tạo ra các mô hình, mô tả quá trình diễn biến của các đại lượng toán học hoặc tổ chức các thực nghiệm toán học. Bằng quan sát các quá trình được máy tính đưa ra, HS đưa ra giả thuyết và sử dụng suy luận có lý để khẳng định hoặc bác bỏ giả thuyết của mình. Các hình thức DH truyền thống như DH đồng loạt, DH theo nhóm, DH cá thể sẽ có điều kiện kết hợp một cách hiệu quả, linh hoạt hơn nếu sử dụng, khai thác CNTT, các hình thức DH cũng "mở"

hơn. Với sự trợ giúp của các phần mềm kiểm tra, đánh giá, GV có điều kiện kiểm soát chặt chẽ toàn bộ quá trình học tập của HS. [27]

Trịnh Thanh Hải và các cộng sự (2005) đã triển khai nghiên cứu ứng dụng CNTT trong DH và đã chỉ ra rằng ứng dụng CNTT trong DH môn Toán thể hiện ở những khía cạnh sau:

- *Điều chỉnh quá trình DH toán dựa trên thông tin phản hồi:* Trong quá trình dạy và học toán, GV, HS có thể đưa ra các dự đoán, giả thuyết của riêng mình và nhờ MTĐT thử nghiệm những dự đoán đó. Trên cơ sở thông tin phản hồi do MTĐT đưa ra ta có thể tiếp tục phát triển hoặc điều chỉnh, thay đổi những giả thuyết chưa chính xác.
- *Sử dụng MTĐT xây dựng các mô hình trực quan để sử dụng trong quá trình dạy và học Toán.*
- *Sử dụng MTĐT và phần mềm toán học để hỗ trợ tính toán, vẽ hình, phát hiện các, tính chất, các mối quan hệ trong toán học*. Chẳng hạn phát hiện yếu tố không đổi trong một tình huống biến đổi (điểm cố định), phát hiện quy luật di động (quỹ tích)….
- *Hỗ trợ học từ xa, học ở mọi nơi, mọi lúc, học với mọi người*. Nhờ CNTT ta có một kho thông tin tích luỹ tri thức toán học của loài người giúp con người có thể khai thác và sử dụng nguồn tài nguyên vô cùng quý giá đó, đồng thời có thể chia sẻ, trao đổi thông tin với nhau trong quá trình dạy và học môn Toán.
- *CNTT đã trở thành một phương tiện dạy và học môn Toán.* [9]

Cũng theo Trịnh Thanh Hải (2006): CNTT có những ứng dụng trong DH như: Tạo ra PPDH có sự trợ giúp của máy tính (Computer Based Training); DH trên nền web (Web Based Training); DH qua mạng (Online Learning Training); DH từ xa, tạo ra môi trường ảo để DH (E-learning) [8]. Đào Thái Lai (2000) [25] đã có những nghiên cứu, bàn về thiết kế phần mềm DH Multimedia; Trần Trung (2008) [43] đã nghiên cứu ứng dụng E-learning trong DH ở các trường dự bị ĐH dân tộc và thiết kế bài giảng điện tử theo

quan điểm DH chương trình hóa. Nguyễn Lan Phương (2001) [31] đã nghiên cứu, xây dựng phần mềm hỗ trợ HS học tập trên trang web.

1.1.1.3. *Một số kết luận rút ra từ những công trình nghiên cứu trên thế giới và tại Việt Nam về sử dụng CNTT trong DH nói chung, DH môn Toán nói riêng*

(1) Trong xã hội ngày này, chúng ta có thể dễ dàng nhận ra vai trò của CNTT trong dạy và học, bởi sự phát triển của máy tính và mạng Internet. CNTT đã tạo ra nhiều cơ hội học tập cho HS ở mọi nơi, mọi lúc và tạo ra nhiều hình thức DH mới.

(2) Những công trình nghiên cứu về sử dụng CNTT DH đã chỉ ra và minh chứng rõ ràng về những ưu điểm mà CNTT đem lại. Những nghiên cứu này tập trung chủ yếu vào tiềm năng về nguồn dữ liệu, sự đa dạng và phong phú của những hình thức tổ chức DH, không giới hạn bó hẹp trong nhà trường mà mang tính xã hội hơn, toàn cầu hơn.

(3) Những công trình trên tập trung chủ yếu vào tổng lược về lí luận và hệ thống hóa, ít thấy những ví dụ minh họa để có thể học hỏi, vận dụng vào thực tiễn DH trong nhà trường Việt Nam. Thiết nghĩ, nếu đi cùng với những lí luận đó, có cả những ví dụ minh họa kèm theo, sẽ nâng cao hiệu quả của những công trình nghiên cứu hơn, đối với chuyên ngành Lí luận và PPDH bộ môn.

1.1.2. Những công trình nghiên cứu về sử dụng phần mềm trong dạy học môn Toán nói chung, dạy học Hình học nói riêng

1.1.2.1. *Trên thế giới*

Ngay từ những năm cuối của thế kỉ XX, đã có không ít những công trình nghiên cứu về sử dụng phần mềm trong DH môn Toán. Chẳng hạn như công trình của Jackiw N. (1995) [79] về sử dụng tính năng thay đổi hình và tạo vết của phần mềm The Geometer’s Sketchpad trong dạy và học Hình học ở trường phổ thông; Công trình của Barnes J. (1997) [55] về lập mô hình hệ thống động với phần mềm bảng tính; Công trình của Terri L. (1999) - nghiên

cứu tiềm năng sử dụng phần mềm Toán học để tăng cường phát triển tư duy của HS. Tác giả đã phân ra năm loại phần mềm toán học có thể được sử dụng hiệu quả trong một chương trình học Toán: (a) các phần mềm rà soát và thực hành, (b) các phần mềm tổng quát, (c) các phần mềm cụ thể, (d) các phần mềm môi trường, và (e) các phần mềm truyền thông. Tác giả đã mô tả về khả năng và hạn chế của năm loại phần mềm và cách thức tạo điều kiện theo các khía cạnh khác nhau trong học tập của HS để có thể giải quyết các mục tiêu giảng dạy Toán học, từ xây dựng các kỹ năng cơ bản đến khám phá các ứng dụng toán học trong thế giới thực tại. [96]

Hannafin R. và Burruss J. và Little C. (2001) [72] đã nghiên cứu về việc học với phần mềm hình học động; Healy L. và Hoyles C. (2001) [73] có công trình về sử dụng các phần mềm hỗ trợ giải các bài toán Hình học. Leong Y. H. (2009) [85], qua kết quả nghiên cứu đã cho rằng việc sử dụng Sketchpad đã giúp HS xác định tốt hơn mối quan hệ hình học so với lớp học thông thường. Lee T. L. (2008) [86] đã giới thiệu gói phần mềm HOM4PS-2.0 trong DH Toán.

Nghiên cứu về sử dụng phần mềm GeoGebra trong DH môn Toán có rất nhiều, có thể kể ra một cố công trình sau: Công trình của Hohenwarter M., Hohenwarter J., Kreis Y. và Lavicza Z. (2008) [77] về dạy và học tính toán với phần mềm GeoGebra; công trình của Herceg Dj. (2007) [74] về học tính với GeoGebra ở trường THPT; công trình của Hohenwarter M., Preiner J. (2007) [78] về sử dụng trong DH Hình học ở trường phổ thông.

Khó có thể kể hết những công trình nghiên cứu về sử dụng phần mềm trong DH Toán, bởi hiện nay có khoảng ba chục phần mềm Toán học khác nhau có thể ứng dụng trong dạy và học Toán.

1.1.2.2. *Ở Việt Nam*

Bộ sách “ Khám phá Hình học 10 với The Geometer’s Sketchpad” [47], “ Khám phá Hình học 11 với The Geometer’s Sketchpad” [48], “ Khám phá

Hình học 12 với The Geometer's Sketchpad" [49] do Trần Vui chủ biên (2007, 2008, 2009) đã giới thiệu nhiều hoạt động khám phá Hình học ở trường THPT với phần mềm Geometer's Sketchpad. Trần Vui và các tác giả viết bộ sách này đã viết các chương trình sử dụng The Geometer's Sketchpad hỗ trợ GV và HS nghiên cứu từng bài học, suốt theo từng chương, từng mục trong các SGK Hình học các lớp 10, lớp 11, lớp 12 THPT. Trong đó, Trần Vui cho rằng: Trong DH HH, đôi khi ta phải vẽ nhiều hình cho nhiều trường hợp vừa mất thời gian vừa cho kết quả không đẹp, không chính xác; hoặc vẽ một số hình thuộc loại khó vẽ (chẳng hạn vẽ thiết diện cô-nic); hoặc minh họa quỹ tích, chúng ta có thể sử dụng một số phần mềm vẽ hình hỗ trợ những công việc đó, để tập trung vào những việc quan trọng khác của bài học. [47]

Trịnh Thanh Hải (2006), đã nghiên cứu sử dụng phần mềm hình học động để dạy một số nội dung Hình học lớp 10 [7] và sử dụng phần mềm Cabri Geometry nhằm đổi mới PPDH Hình học lớp 7 [8] theo hướng tích cực hóa hoạt động học tập của HS. Tác giả đã đề xuất những biện pháp khai thác phần mềm Cabri Geometry đề DH trong các tình huống điển hình theo định hướng đổi mới PPDH nhằm tích cực hóa hoạt động học tập của HS. Đó là: Trong DH khái niệm, sẽ hỗ trợ tiếp cận, nhận dạng, thể hiện, phân chia khái niệm; trong DH định lí, sẽ hỗ trợ gợi động cơ chứng minh, nhận dạng, thể hiện định lí; trong giải bài tập toán học, sẽ hỗ trợ phân tích, tìm tòi khám phá lời giải bài toán, kiểm tra lại lời giải, hỗ trợ DH một số chủ đề khó: DH quỹ tích, giải toán về GTLN, GTNN… [9]. Ngoài ra tác giả còn một số công trình khác, về hỗ trợ việc dạy hình học lớp 10 bằng bài tập thông qua lập trình PASCAL [6]; sử dụng phần mềm hình học động để dạy một số nội dung hình học lớp 10 [7].

Trịnh Thanh Hải và Trần Việt Cường (2006) [10], đã nghiên cứu khai thác phần mềm hình học động trong DH hình học lớp 10, sử dụng phần mềm Geospacw trong DH HHKG theo hướng phát hiện và giải quyết vấn đề.

Trần Trung và Đỗ Hồng Thuận (2008) [45] đã khai thác phần mềm Cabri3D trong DH Hình học ở các trường dự bị ĐH dân tộc. Trịnh Thị Phương Thảo (2011) đã khai thác các phần mềm DH nhằm tích cực hóa hoạt động học tập trong DH môn Toán ở THPT.

Trong các bài báo [51], [52] Lê Tuấn Anh (2015) đã quan tâm đến việc rèn luyện kĩ năng sử dụng phần mềm GeoGebra của sinh viên sư phạm ngành toán, có thể xem Geogebra như một công cụ để khám phá toán trong dạy và học toán và thực trạng sử dụng phần mềm này trong chương trình đào tạo GV Toán của trường ĐHSP Hà Nội.

Nguyễn Danh Nam (2012) [91] đã nghiên cứu sử dụng phần mềm GeoGebra trợ giúp tương tác, tạo ra các cuộc tranh luận trong quá trình chứng minh.

Trần Trung, Nguyễn Ngọc Giang, Bùi Minh Đức và Phan Anh Hưng (2014) [97] đã nghiên cứu về PPDH khám phá với sự hỗ trợ của phần mềm GeoGebra.

1.1.2.3. *Một số kết luận rút ra từ các công trình nghiên cứu trên thế giới và Việt Nam về việc sử dụng phần mềm toán học trong DH môn Toán*

(1) PMDH là phương tiện chứa chương trình để ra lệnh cho máy tính thực hiện các yêu cầu về nội dung và phương pháp DH theo các mục tiêu DH. Một PMDH bao gồm các chức năng cho phép biểu diễn các dạng thông tin khác nhau như văn bản, ký hiệu, hình ảnh tĩnh, hình ảnh động, âm thanh... Phần mềm DH là phương tiện xử lý thông tin và đưa ra các thông tin phản hồi một cách nhanh chóng, chính xác.

(2) Với sự phát triển nhanh chóng của công nghệ phần mềm, ngày nay các PMDH đã trở nên rất phong phú, đa dạng, trong đó có rất nhiều phần mềm có thể khai thác để rèn luyện kỹ năng thực hành cho HS. Chẳng hạn với phần mềm Graph, phần mềm hình học Euclid, phần mềm GeoSpace, phần mềm AutoGraph.

(3) Các tác giả ở trong nước và ngoài nước đã có nhiều kết quả nghiên cứu về sử dụng phần mềm hình học động trong DH, chủ yếu là phần mềm Cabri, Geometer's Sketchpad, GeoGebra, tập trung nhiều vào Hình học phẳng.

(4) Theo chúng tôi: Các phần mềm hình học động còn có thể hỗ trợ tốt cho việc giải toán HHKG theo những phương pháp chuyên biệt: cắt, ghép hình, trải hình. Các phần mềm có chức năng đo đạc các đại lượng hình học (độ lớn góc, độ dài đoạn thẳng) sẽ hỗ trợ cho việc kiểm nghiệm tính đúng đắn của những dự đoán, giảm bớt thời gian và công sức đi tìm kiếm chứng minh cho điều đó.

1.2. Chương trình Hình học ở trường phổ thông Việt Nam và một số vấn đề liên quan đến dạy và học Hình học không gian

1.2.1. Chương trình Hình học ở trường phổ thông và những khó khăn của HS khi học Hình học không gian

1.2.1.1. *Chương trình Hình học ở trường phổ thông*

Chương trình Hình học ở trường THPT Việt Nam bao gồm các nội dung sau: Vectơ trong mặt phẳng và trong không gian; Hệ thức lượng trong tam giác và trong đường tròn; Hình học không gian; Phép biến hình trong mặt phẳng và trong không gian; Tọa độ trong mặt phẳng và trong không gian.

Chương trình Hình học phổ thông giúp chúng ta: Phân tích đặc điểm và tính chất của các hình, khối hình học hai, ba chiều và phát triển lí luận toán học về các mối quan hệ hình học; xác định vị trí các hình, khối và mô tả mối quan hệ không gian; sử dụng trực quan, lí luận về không gian, và mô hình hình học để giải quyết vấn đề. Hình học và ý thức về không gian là những thành phần cơ bản của việc học Toán học. Chúng cung cấp cách để giải thích và phản ánh về thế giới của chúng ta và có thể phục vụ như là công cụ để nghiên cứu về các chủ đề khác trong Toán học và Khoa học.

Hầu hết những kiến thức Hình học ở trường THPT là mới lạ và khó đối với HS, vì lần đầu tiên các em được làm quen với những PP mới nghiên cứu Hình học: PP vectơ, phép biến hình và PP tọa độ. Những phép toán trong những PP nghiên cứu mới này có tính trừu tượng cao hơn, không gần gũi, trực giác với những phép toán số học, đại số và những phép đo đạc các đại lượng hình học trên những hình quen thuộc mà các em được học ở cấp Tiểu học và THCS. Chẳng hạn, các em khó hiểu tại sao cộng hay nhân hai vectơ khác với phép cộng, phép nhân thông thường,

Cấu tạo chương trình HHKG ở trường phổ thông Việt Nam theo đường xoắn ốc:

Ở cấp Tiểu học, HS được giới thiệu các hình cơ bản, thừa nhận các công thức tính diện tích, thể tích hình lập phương, hình hộp chữ nhật, mặt cầu, mặt trụ để tính toán (lớp 5);

Ở cấp THCS, HS được biết về lăng trụ đứng, hình chóp đều, chóp cụt đều (lớp 8) và các khối tròn xoay (lớp 9), các công thức tính thể tích, diện tích, hình khai triển của chúng;

Ở cấp THPT HS được giới thiệu một số mệnh đề thừa nhận của HHKG, biết vẽ hình biểu diễn của một số hình đơn giản, biết xác định giao điểm, giao tuyến, thiết diện, nhận biết và chứng minh được mối quan hệ song song, vuông góc; tính được các góc, khoảng cách trong các bài toán HHKG đơn giản; có khái niệm về khối đa diện, sự bằng nhau, sự đồng dạng của các khối đa diện, thể tích của khối đa diện; biết tính diện tích một hình, thể tích một khối cầu, trụ, nón.

1.2.1.2. *Những khó khăn trong dạy và học Hình học không gian ở trường Trung học phổ thông*

Xác định hình trên hình biểu diễn bao gồm: xác định giao tuyến của hai mặt phẳng, xác định giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng, xác định thiết diện, xác định hình chiếu vuông góc của một điểm trên một mặt phẳng, xác

định đường vuông góc chung, xác định góc giữa hai đường thẳng, góc giữa đường thẳng và mặt phẳng, góc giữa hai mặt phẳng...

Việc vẽ hình biểu diễn của hình không gian trên mặt phẳng là rất quan trọng, song thường là khó khăn đối với HS. Bởi vì hình biểu diễn của một hình không gian là hình chiếu song song của hình đó trên mặt phẳng biểu diễn (tờ giấy, mặt bảng,...) hay hình đồng dạng với hình đó. Hình biểu diễn bảo toàn các tính chất aphin của hình không gian (tính chất liên thuộc, thẳng hàng, tỉ số các đoạn thẳng cùng phương,...), không bảo toàn tính chất mêtric (độ dài đoạn thẳng, độ lớn góc,...). Chính vì thế, ngay từ những tiết học đầu tiên về HHKG, GV cần phải giúp HS làm quen dần với việc biểu diễn này. Kĩ năng biểu diễn hình giúp HS phát triển trí tưởng tượng không gian và nhận thức tốt hơn những quan hệ trong hình đó, nhưng cũng là một trở ngại lớn đối với phần đông các HS.

Các em cũng khó hình dung ra một hình không gian từ hình biểu diễn của nó trên mặt phẳng, khó hình dung ra thiết diện của một hình đa diện cắt bởi một mặt phẳng, khó hình dung ra hình chiếu của một điểm trên một mặt phẳng, hình dung ra mặt hypecboloit do một đường thẳng quay xung quanh một trục chéo nhau với nó (trong SGK HH nâng cao 12 [40]) v. v…. Chính sự ra đời của một số phần mềm hình học động hỗ trợ vẽ hình đã phần nào giảm bớt những khó khăn nói trên của HS.

DH Hình học liên quan tới một hoạt động đặc thù là vẽ hình. Trong quá trình dạy và học hình học, chúng ta cần vẽ không ít hình. Ngoài những hình đơn giản trong mặt phẳng như tam giác, tứ giác, hình tròn, ta còn cần vẽ những hình phức tạp hơn. Chẳng hạn như: vẽ đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp, bàng tiếp một tam giác cho trước; vẽ đường tròn đi qua hai điểm và tiếp xúc với một đường tròn cho trước….

Đôi khi chúng ta không chỉ phải vẽ một hình, mà cần phải vẽ nhiều hình, ứng với những trường hợp khác nhau của một bài toán. Chẳng hạn, vẽ đường tròn đi qua hai điểm và tiếp xúc với một đường tròn cho trước, trong hai trường hợp: tiếp xúc trong và tiếp xúc ngoài đường tròn đó; hay khi cần vẽ một số trường hợp đặc biệt để dự đoán quỹ tích, dự đoán điểm cố định….

Khó vẽ hơn nữa và mất nhiều thời gian hơn nữa khi chúng ta phải vẽ hình biểu diễn của nhiều hình không gian. Chẳng hạn, vẽ thiết diện của một hình lập phương cắt bởi một mặt phẳng vuông góc với một đường chéo nào đó của nó.

Với các phần mềm hỗ trợ vẽ hình như Geogebra, Geometer's Sketchpad, Cabri 2D, Cabri 3D … phần nào sẽ giúp chúng ta khắc phục những khó khăn này.

Đó cũng là lí do chúng tôi lựa chọn nội dung HHKG trong nghiên cứu của mình.

1.2.2. Vai trò của trí tưởng tượng không gian, tư duy trực quan và tư duy thị giác trong học tập Hình học không gian

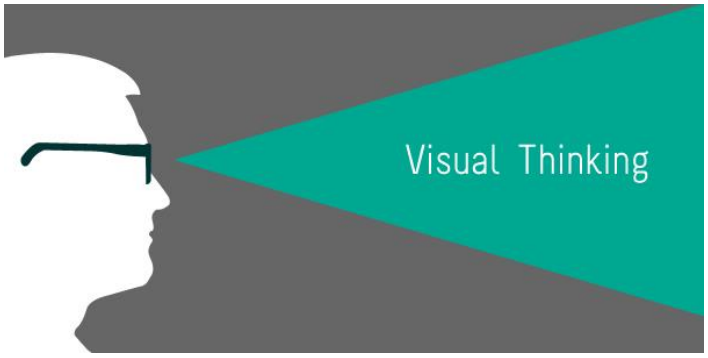
1.2.2.1. *Vai trò của trí tưởng tượng không gian trong học tập Hình học không gian*

Nghiên cứu HHKG là nghiên cứu các hình, khối trong không gian thông qua hình biểu diễn của chúng trên mặt phẳng, nên nếu HS có trí tưởng tượng không gian hay tư duy trực quan trong HHKG không tốt sẽ ảnh hưởng không nhỏ tới hiệu quả học tập HHKG.

HHKG rất có điều kiện phát triển trí tưởng tượng không gian cho HS. Không có trí tưởng tượng thì không có sự sáng tạo nào hết. Bởi vì cái được sáng tạo là cái mới, cái chưa có, nên phải tưởng tượng ra nó. Thông qua phân môn HHKG trí tưởng tượng của HS sẽ được phát triển tốt hơn.

1.2.2.2. *Vai trò của tư duy trực quan và tư duy thị giác trong học tập Hình học không gian*

Theo Linda Kreger Silverman - *nhà Tâm lí học, người Mĩ* (2005) [87]:



Hình 1. Tư duy thị giác

Tư duy trực quan và tư duy thị giác (Visual Thinking) (Hình 1) gắn liền với quá trình nhận thức. Tư duy trực quan được chia làm hai loại: Tư duy trực quan hành động và tư duy trực quan hình tượng. Tư duy trực quan hành động là loại hình tư duy được thực hiện bằng hành động bên ngoài, thông qua ngũ quan: thính giác, thị giác, khứu giác, vị giác và xúc giác. Tư duy trực quan hình tượng là loại hình tư duy dựa vào hình ảnh trong đầu để xác lập các mối quan hệ. Kiểu tư duy này là một trình độ phát triển cao hơn kiểu tư duy trực quan hành động. Tư duy thị giác, còn được gọi là tư duy hình ảnh là hiện tượng tư duy thông qua xử lý hình ảnh. Tư duy thị giác là một bộ phận của tư duy trực quan. Tư duy thị giác phổ biến trong khoảng 60% - 65% dân số nói chung trong đó có gần 30% dân số sử dụng tư duy thị giác không gian.

Năm 1983, Howard Gardner (nhà tâm lý học nổi tiếng của Đại học Harvard) đã xuất bản cuốn sách "Cơ cấu của trí tuệ" (Frames of Mind) công bố các nghiên cứu và lý thuyết về sự đa dạng của trí thông minh (Theory of Multiple Intelligences). Theo Howard Gardner (1983): Trí thông minh là khả năng giải quyết các vấn đề hoặc tạo ra các sản phẩm mà các giải pháp hay sản phẩm này có giá trị trong một hay nhiều môi trường văn hóa và trí thông minh

cũng không thể chỉ được đo lường duy nhất qua chỉ số IQ. Theo ông, người ta có chín loại trí thông minh khác nhau: Trí thông minh về toán học/ logic (mathematical/ logical) (những người có trí thông minh này có thiên hướng học tập thông qua các lập luận logic, thích toán học, lập trình, chơi xếp hình…); Trí thông minh về ngôn ngữ/ lời nói (verbal/ linguistic) (những người có trí thông minh này có thiên hướng học tập thông qua việc nói và viết, thích đọc, chơi ô chữ…); Trí thông minh về thị giác/ không gian (visual/ spatial) (những người có trí thông minh này có thiên hướng học tập thông qua hình ảnh, đồ vật, sử dụng tốt bản đồ và định hướng tốt trong không gian…); Trí thông minh về vận động (bodily/ kinesthetic) (những người có trí thông minh này có thiên hướng học tập thông qua cách vận động và sử dụng động tác, cảm thấy thích thú khi vận động cơ thể, chơi thể thao…); Trí thông minh về âm nhạc/ giai điệu (musical/ rhythmic) (những người có trí thông minh này có thiên hướng học tập thông qua các giai điệu, âm nhạc, thích chơi nhạc cụ, hát, đọc truyền cảm các tác phẩm…); Trí thông minh hướng ngoại (interpersonal) (những người sở hữu trí thông minh này có thiên hướng học tập thông qua sử dụng các kĩ năng xã hội, giao tiếp, hợp tác làm việc với người khác, thích gặp gỡ và trò chuyện, có khả năng thông hiểu người khác…); Trí thông minh hướng nội (intrapersonal) (những người có trí thông minh này có thiên hướng học tập thông qua tình cảm, cảm giác, điều khiển và làm chủ tốt việc học của mình, hiểu rõ các suy nghĩ của bản thân, từ đó có thể hiểu được cảm xúc, tình cảm của người khác…); Trí thông minh thiên nhiên (naturalish); Trí thông minh hiện sinh (existential) [70]

Lý thuyết của Gardner đã chỉ ra rằng mỗi người trong chúng ta đều tồn tại một vài kiểu thông minh trên, tuy nhiên, sẽ có kiểu thông minh trội hơn trong mỗi người.

Thuyết đa trí tuệ đã mang lại một cái nhìn nhân bản và cần thiết trong nhà trường và lưu ý GV cần coi trọng sự đa dạng về trí tuệ ở mỗi học sinh:

mỗi loại trí tuệ đều quan trọng và mỗi học sinh đều có ít nhiều khả năng theo nhiều khuynh hướng khác nhau. Nhà trường phải là nơi giúp đỡ, khơi gợi tiềm năng, tạo điều kiện học tập theo các hướng khác nhau cho các chủ nhân tương lai của xã hội. Làm được điều đó, chúng ta sẽ giúp mỗi học sinh tỏa sáng và thành công trong cuộc sống của chúng.

Như vậy, theo lý thuyết về đa trí tuệ của Howard Gardner: Tư duy không gian là một trong các loại hình tư duy của con người.

Nhờ có tư duy không gian mà ta có thể tưởng tượng ra một điều gì đó; ta có thể thấy chiều sâu của một bức tranh vẽ trên mặt phẳng hai chiều. Cũng chính vì thế khi ta nhìn hình biểu diễn của một hình không gian, ta có thể hình dung ra hình đó trong không gian ba chiều.

Theo Hamilton C. R. (1998): Tư duy không gian thuộc về bán cầu não phải; Bán cầu não phải của con người chỉ đạo các hoạt động nhận thức, suy nghĩ, ghi nhớ, ý chí và xúc cảm của con người. Bán cầu não phải có vai trò xử lý hình tượng tổng thể, khái niệm không gian, phân biệt hình vẽ, khả năng cảm thụ âm nhạc, khả năng bắt chước. Bán cầu não phải có cơ năng mang tính chỉnh thể, tổng hợp, sáng tạo, chủ quan trực giác, trí tưởng tượng, thái độ, tình cảm, ý chí của con người. Còn bán cầu não trái có nhiệm vụ xử lý ngôn ngữ, tư duy trừu tượng, viết, tính toán, sắp xếp, phân loại, ghi nhớ từ ngữ và tri giác thời gian. [71]

Hình 2. Tư duy không gian thuộc về bán cầu não phải

Nhà tâm lý học Jaensch E.R. (1930) [79] khẳng định rằng: bộ nhớ nhiếp ảnh (eidetic) được lưu trữ rất lâu trong bộ não con người. Bởi vậy nếu thừa nhận và áp dụng các hình thức tư duy thị giác, âm thanh, âm nhạc, toán học và lời nói, sẽ là tốt nhất trong DH ở trường phổ thông.

Tư duy thị giác đã được nghiên cứu bởi Arnheim, Rudolf (1969). Tác giả đã đi đến kết luận: Tư duy thị giác có mối liên kết với chứng tự kỷ; Kém tư duy thị giác là nguồn gốc của chứng tự kỷ. [53]

Theo Ware, Colin (2008): Các khái niệm liên quan đến tư duy thị giác đã đóng một vai trò quan trọng trong giáo dục, đặc biệt là giáo dục nghệ thuật và thiết kế trong vài thập kỷ qua. Ở thời Hy Lạp cổ đại, Plato đã có khuynh hướng đặt trọng tâm vào hình ảnh, âm thanh để giúp trẻ nhận thức tốt hơn trong khoa học nói chung, trong toán học nói riêng. Tuy nhiên, xu hướng chung của thế giới vào những năm 70 của thế kỉ XX đã gây ra một hướng khác về cách tiếp cận khoa học, toán học và định lượng đối với giáo dục mang tính chất và chủ quan, quên mất vai trò tư duy thị giác trong nhận thức. Nó làm cho việc đo lường và đánh giá trong giáo dục khó khăn hơn. [107]

Theo Michel Deza, Elena Deza (2009): Tư duy thị giác thông qua hình ảnh, âm thanh có vai trò quan trọng đối với nhận thức. Các mô hình nhận thức không chỉ phổ biến ở nhiều khía cạnh khác nhau của cuộc sống hàng ngày, mà còn nói về cách giải thích của chúng ta về thế giới. Đó là những lợi thế của việc kết hợp nghệ thuật và hình ảnh vào GD. Sự chuyển hóa từ ngôn ngữ lời nói, sang ngôn ngữ hình ảnh sẽ giúp bộ não tiếp nhận thông tin tốt hơn, nâng cao hiệu suất làm việc, học tập và khởi tạo ý tưởng. [88]

1.2.2.3. *Phương pháp trực quan trong dạy học*

Theo Nguyễn Văn Hộ và Hà Thị Đức (2008): Trực quan là tính chất có tính qui luật của quá trình nhận thức khoa học.

Để bảo đảm tính trực quan, trong DH, cần chú ý tăng cường cho HS tri giác các đối tượng. Có thể cho HS tri giác không phải bản thân đối tượng nghiên cứu, mà tri giác những hình ảnh, biểu tượng, sơ đồ phản ảnh một bộ phận nào đó của đối tượng. [16]

Cũng theo tài liệu trên: PPDH trực quan là PP sử dụng những phương tiện trực quan, phương tiện kĩ thuật trong quá trình DH; có thể sử dụng trước, trong hoặc sau khi trang bị tri thức mới, khi ôn tập, khi củng cố, hệ thống hóa và kiểm tra tri thức, kĩ năng, kĩ xảo của HS.

PPDH trực quan có thể thể hiện dưới hình thức minh họa hoặc trình bày: Minh họa thông qua bản mẫu, bản vẽ, tranh, ảnh, mô hình; Trình bày thông qua máy chiếu, phim, video clip…. Thông qua sự trình bày của GV, các em không chỉ lĩnh hội dễ dàng tri thức mà còn giúp các em được tập luyện những thao tác mẫu của GV, từ đó hình thành kĩ năng, kĩ xảo....

Trong khi tri giác, những biểu tượng có sơ đồ hóa hoặc hình ảnh của đối tượng và hiện tượng, quá trình cần nghiên cứu, HS có thể tìm hiểu được bản chất của các quá trình và hiện tượng đã thực sự xảy ra. Những tính chất và hiểu biết về đối tượng được HS tri giác không chỉ bằng thị giác mà còn có thể bằng xúc giác, thính giác và trong một số trường hợp ngay cả khứu giác cũng được sử dụng.

Theo Bruner J. S. (1974): Sự thu nhận thông tin của con người càng hiệu quả nếu thông tin đó tác động đến càng nhiều các cơ quan cảm giác của con người. [61]

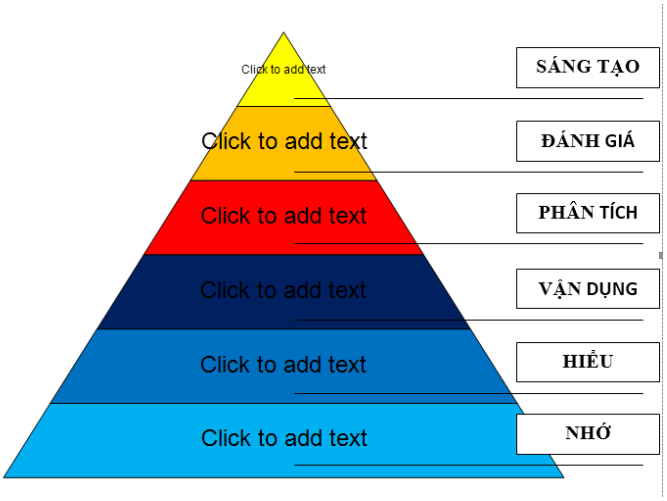
1.2.3. Vai trò của việc học qua hành động trong học tập Hình học không gian

Theo kết quả của Phòng nghiên cứu Huấn luyện Quốc gia, Bethel, Maine (một thị trấn ở Quận Oxford, bang Maine, Hoa Kì): Mức độ ghi nhớ chỉ được 5% nếu chỉ nghe giảng, được 10% nếu đọc, được 20% nếu nghe – nhìn,

sẽ nhớ nhiều hơn nếu họ trình bày (30%), thảo luận (50%). Đặc biệt, nếu thực hành sẽ nhớ lâu (75%), cách tốt nhất để nhớ là dạy lại cho người khác (90%). (Hình 3)

Hình 3. Mức độ ghi nhớ theo các hoạt động

Kết quả này phù hợp với 6 cấp độ trong thang nhận thức của Benjamin Bloom. Bao gồm: Nhớ (Remembering); Hiểu (Understanding); Vận dụng (Applying); Phân tích (Analyzing); Đánh giá (Evaluating); Sáng tạo (Creating). (Hình 4)



Hình 4. Các cấp độ trong thang nhận thức của Bloom

Năm 1995, Georges Charpak - viện sĩ VHLKH Pháp đã đề xuất phương pháp LAMAP – viết tắt cuả cụm từ tiếng Pháp “La main à la pâte” (bàn tay

nặn bột) (tiếng Anh là Hands-on, hay Learning by Hand). Đây là PPDH các môn khoa học tự nhiên dựa trên tìm tòi, nghiên cứu.

Theo PP này, dưới sự giúp đỡ của GV, chính HS là người tìm ra câu trả lời cho các vấn đề được đặt ra trong cuộc sống thông qua tiến hành thí nghiệm, quan sát, nghiên cứu tài liệu hay điều tra để từ đó hình thành kiến thức cho mình.

Những cơ sở khoa học nêu trên đã làm rõ vai trò của trí tưởng tượng không gian, tư duy trực quan, tư duy thị giác và vai trò của việc học qua hành động trong học tập HHKG. Trong những trường hợp trí tưởng tượng không gian, tư duy trực quan của HS còn bị hạn chế thì phần mềm hình học động sẽ góp phần hỗ trợ và khắc phục những hạn chế đó.

1.2.4. Phần mềm GeoGebra 5.0

Markus Hohenwarter và Judith Preiner (Đại học Florida Atlantic, Hoa Kì) là những người đã sáng tạo ra phần mềm GeoGebra. Đây là một phần mềm Toán học dùng trong Hình học, Đại số, Vi phân, Tích phân. Phần mềm này được phát triển cho việc dạy toán trong các trường học.

Khi phần mềm GeoGebra 5.0 phiên bản tiếng Việt được mở ra, trên thanh công cụ xuất hiện dòng các nhóm lệnh: hồ sơ, chỉnh sửa, hiển thị .... Với các nhóm lệnh này ta có thể lưu trữ, chỉnh sửa, hiện thị (dạng 2D hoặc 3D ...), tùy chọn (ngôn ngữ, thiết lập định dạng hiển thị theo đơn vị độ dài, độ lớn góc ...), thêm hoặc bớt các nút công cụ ....

Khi hiển thị dạng 3D, trên thanh công cụ xuất hiện các nút sau đây: nút di chuyển, xác định điểm (dựng điểm mới, giao điểm, trung điểm ...), dựng đường thẳng (hoặc dựng tia, đoạn thẳng ...), dựng đường vuông góc (hoặc đường song song, các tiếp tuyến ...), dựng đường tròn hoặc đường cô-nic, dựng giao của hai mặt, dựng mặt phẳng (qua ba điểm ...), dựng các hình đa diện hoặc trải hình, dựng mặt cầu, tính các đại lượng hình học (góc, khoảng

cách, diện tích, thể tích), dựng ảnh của một điểm qua một phép biến hình, chèn chữ, thay đổi góc nhìn 3D (Hình 5).

Hình 5. Giao diện 3D của phần mềm GeoGebra 5.0 phiên bản tiếng Việt

Phần mềm GeoGebra rất tiện dụng để vẽ hình trong không gian. Chẳng hạn để vẽ một hình lập phương hay một tứ diện đều: trên mặt phẳng (Oxy) trong hệ tọa độ Oxyz, ta chỉ việc xác định hai điểm, lập tức có ngay một hình lập phương hay một tứ diện đều. Để vẽ một hình nón (tròn xoay) ta chỉ việc xác định một điểm là tâm đường tròn đáy, một điểm là đỉnh và nhập một số biểu thị độ dài bán kính đáy, ta được ngay một hình nón.

GeoGebra là phần mềm hình học động, vì ta có thay đổi các điểm, các đường, các mặt một cách linh động. GeoGebra hỗ trợ kết nối Hình học phẳng, HHKG, Đại số, Xác suất, Thống kê, Bảng tính điện tử và các yếu tố toán học khác một cách khá chặt chẽ. Ngoài ưu điểm nổi bật của GeoGebra là vẽ hình trực quan, có thể xoay hình biến đổi hình theo nhiều góc nhìn khác nhau, GeoGebra còn có thể xử lý biến số, vectơ và điểm, tìm đạo hàm và tích phân của hàm số....

Có hai chế độ hiển thị đặc trưng trong GeoGebra: một biểu thức trong cửa sổ đại số tương đương với một đối tượng trong trong cửa sổ hình học và ngược lại. Cửa sổ hình học (ở bên phải) hiển thị dạng hình học: các điểm, vec-tơ, đoạn thẳng, đa giác, hàm số, đường thẳng, đường cô-nic. Mỗi khi ta trỏ chuột lên các đối tượng này, đối tượng sẽ được tô sáng và xuất hiện một chú thích kế bên đối tượng. Ta có thể dùng chuột để vẽ nhiều loại đối tượng trong vùng làm việc (biểu tượng Công cụ) như vẽ điểm mới, tìm giao điểm của hai đối tượng, hoặc vẽ hình tròn, mặt cầu… Ta có thể nhấp đúp chuột lên một đối tượng để có thể chỉnh sửa đối tượng đó.

GeoGebra là phần mềm hoàn toàn miễn phí và hỗ trợ hiệu quả công việc học tập, giảng dạy và đánh giá. GeoGebra có giao diện khá hợp lí, dễ dàng sử dụng và khả năng tương tác đầy đủ với nhiều tính năng mạnh mẽ. Ta có thể truy cập nhiều nguồn tài nguyên tại www.geogebra.org với nhiều ngôn ngữ khác nhau, trong đó có tiếng Việt. GeoGebra thích ứng với nhiều hệ điều hành.

Với những ưu điểm nổi bật trên đây, GeoGebra đã được hàng triệu người trên khắp thế giới tin dùng. Cộng đồng người sử dụng GeoGebra rất đông đảo, hoạt động trên nhiều lĩnh vực khác nhau: Giáo dục, Toán học, Vật lí, Hóa học, Nghệ thuật.... Nhiều Viện nghiên cứu về GeoGebra được hình thành trên khắp thế giới: Hoa Kì, Anh, Ấn Độ, Cộng hòa liên bang Đức....

GeoGebra có thể hoạt động trên nhiều thiết bị: Máy tính để bàn, máy tính xách tay, máy tính bảng, điện thoại thông minh... nên phần mềm này được sử dụng rộng rãi, thường xuyên.

Hiện nay đã có những phiên bản khác nhau của phần mềm GeoGebra. Trong luận án này chúng tôi sử dụng phiên bản GeoGebra 5.0.

1.3. Khảo sát thực trạng về sử dụng công nghệ thông tin trong dạy và học Hình học không gian ở trường Trung học phổ thông

1.3.1. Tổ chức khảo sát thực trạng

Để khảo sát thực trạng sử dụng CNTT trong DH HHKG chúng tôi đã lập phiếu xin ý kiến từ 300 GV Toán THPT. Trong đó có 150 GV các tỉnh miền Bắc, 50 GV các tỉnh miền Trung. Các GV chủ yếu là học viên cao học của một số trường Đại học (ĐH): ĐH Sư phạm Hà Nội, ĐH Giáo dục – ĐH Quốc gia Hà Nội, ĐH Hùng Vương Phú Thọ, ĐH Thái Nguyên, ĐH Tây Bắc, ĐH Đồng Tháp, ĐH An Giang, …. trong các năm 2015, 2016. Những GV tham gia khảo sát đều đã có thâm niên dạy Toán ở trường THPT từ 5 năm trở lên.

Mẫu phiếu khảo sát xin xem phụ lục 3.

1.3.2. Kết quả khảo sát thực trạng

Với nhóm câu hỏi "Có thể sử dụng CNTT để làm gì trong quá trình DH HHKG?" - nhóm (I), các GV được hỏi đều tập trung vào các việc: trình chiếu một số nội dung bài học thay cho viết bảng hoặc trình chiếu một số hình vẽ, hình ảnh minh họa cho bài học.

Hầu hết các GV được hỏi (92%) cho rằng có thể dùng phần mềm có tính động tạo vết minh họa quỹ tích hoặc thay đổi hình để thấy điểm cố định của một nhóm đối tượng. Ngược lại, chỉ có số ít GV (8%) cho rằng có thể sử dụng CNTT để trình chiếu một nhóm kết quả để phát hiện tính quy luật hoặc kết quả khái quát. Có 62% số GV cho rằng có thể sử dụng CNTT để trình chiếu hình ảnh để dẫn nhập vấn đề trong bài học và có 38% số GV cho rằng có thể sử dụng CNTT để chiếu video dẫn nhập vấn đề trong bài học.

Khi được hỏi "Bản thân thường xuyên sử dụng CNTT để làm việc nào trong các việc đã chỉ ra ở nhóm (I) trong DH HHKG?", nhìn chung các GV cũng chọn phương án tương ứng với phương án đã chọn ở nhóm (I). Tức là tất cả GV đều cho rằng CNTT có thể hỗ trợ tốt nhất cho việc trình chiếu nội dung bài học thay cho viết bảng, hoặc trình chiếu một số hình vẽ, hình ảnh minh họa cho bài học; rất ít GV (8%) cho rằng không hiệu quả khi sử dụng CNTT để phát hiện tính quy luật hoặc khái quát hóa kết quả từ một nhóm kết quả cụ thể được chiếu lên.

Như vậy, việc đánh giá CNTT có thể giúp GV làm gì trong quá trình DH HHKG phụ thuộc vào bản thân người GV đó đã từng làm được việc đó hay chưa? dễ làm hay khó làm? Hay chưa bao giờ làm. Điều này được thấy rõ hơn khi chúng tôi đánh giá kết quả điều tra nhóm câu hỏi (III): "CNTT có thể

hỗ trợ tốt cho những hoạt động học tập nào ?” trong các hoạt động đã chỉ ra trong bảng hỏi.

Tất cả GV được hỏi đều cho rằng CNTT có thể hỗ trợ vẽ hình; 90% cho rằng CNTT có thể hỗ trợ minh họa quỹ tích hoặc minh họa điểm cố định cho các bài toán dạng này. Có một số ít GV (8%) cho rằng CNTT có thể hỗ trợ tạo tình huống có vấn đề, giải quyết vấn đề hoặc hỗ trợ dự đoán kết quả bài toán, tìm lời giải bài toán.

Về nhóm câu hỏi về mức độ sử dụng CNTT trong các công việc thuộc chuyên môn, nghề nghiệp của bản thân - nhóm câu hỏi (IV), kết quả thu được như sau:

Hầu hết GV (88%) hoàn toàn đồng ý với ý kiến cho rằng bản thân rất ít khi sử dụng CNTT trong các công việc thuộc chuyên môn, nghề nghiệp; còn lại 12% GV có sử dụng CNTT trong các hoạt động: chuẩn bị bài, trong quá trình lên lớp, trong đánh giá kết quả học tập của HS, trong trình bày một vấn đề trong các hội nghị, hội thảo, trong tự học nâng cao trình độ hoặc trong trao đổi dạy và học với đồng nghiệp và HS.

Khi chúng tôi trao đổi kĩ hơn về nguyên nhân dẫn đến kết quả GV ít khi sử dụng CNTT trong các công việc thuộc chuyên môn hoặc trong DH, các câu trả lời tập trung vào vấn đề: mất nhiều thời gian và ít hiệu quả. Ngoài ra còn một số nguyên nhân về cơ chế, chế tài, điều kiện, có sở vật chất, trình độ khai thác và sử dụng CNTT....

Một số kết luận rút ra từ khảo sát thực trạng:

- Hầu hết GV Toán ở trường THPT đều đã biết về sử dụng CNTT trong DH môn Toán. Tuy nhiên phần lớn GV đều cho rằng ứng dụng chủ yếu của CNTT trong DH môn Toán là hỗ trợ trình chiếu bài giảng, vẽ hình và minh họa quỹ tích; ít thấy sử dụng CNTT hỗ trợ giải toán.

- Hầu hết GV Toán cho rằng nên tập trung vào khai thác ứng dụng CNTT vào DH, thông qua phần mềm trình chiếu và phần mềm toán học, để phù hợp với chức năng, nhiệm vụ của người GV.

Từ thực trạng đó chúng tôi xác định: Luận án cần tập trung nghiên cứu, khai thác, bổ sung thêm những ứng dụng của CNTT theo hướng hỗ trợ khắc phục khó khăn, hỗ trợ DH và đặc biệt là hỗ trợ giải toán HHKG ở trường THPT; chủ yếu thông qua sử dụng phần mềm toán học.

1.4. Kết luận chương I

Bước sang thế kỉ XXI, CNTT ngày càng phát triển mạnh mẽ, tạo ra cuộc cách mạng trong hầu hết các lĩnh vực xã hội, kinh tế và tạo ra những biến đổi to lớn trong phạm vi toàn cầu. CNTT đã xâm nhập và trở thành một công cụ đắc lực không thể thiếu trong mọi lĩnh vực, trong đó có GD. CNTT đã nâng cao hiệu quả quản lý GD, và góp phần đổi mới nội dung, PPDH các môn học, đặc biệt là môn Toán.

Nhiều thành tựu của CNTT có thể khai thác trong DH: thiết kế các mô hình thực tiễn, tích hợp nhiều dạng dữ liệu như văn bản, biểu đồ, âm thanh, hình ảnh, video... vào bài giảng nhằm hỗ trợ tối đa khả năng tiếp thu kiến thức của người học, tăng cường trao đổi thông tin giữa GV với HS và giữa các HS với nhau.

CNTT giúp GV tạo ra một môi trường DH mới nhằm bổ sung, khắc phục một số nhược điểm của môi trường học truyền thống, như tạo ra tài nguyên học tập phong phú với khả năng lưu trữ hầu hết các dạng thông tin của loài người nhờ công nghệ số hoá, tạo ra những kênh thông tin đa dạng làm tăng hiệu quả học tập cho HS, tạo ra môi trường tương tác, hỗ trợ HS khám phá tri thức, giải quyết vấn đề, thực hành sáng tạo, kiểm tra đánh giá kết quả hoạt động, học tập.

CNTT góp phần đổi mới việc học của HS: hỗ trợ học từ xa, hỗ trợ học ở mọi nơi, mọi lúc; học phân hóa và tự học.

Trên cơ sở các thành tựu phát triển của các PMDH, chúng ta có thể tạo ra một môi trường học tập hết sức thuận lợi cho HS. Trong môi trường này, HS là chủ thể hoạt động, tác động lên các đối tượng và qua đó HS chiếm lĩnh được các tri thức và kỹ năng mới. Với sự phát triển của mạng Internet và các ứng dụng trên mạng đã tạo điều kiện hết sức thuận lợi cho việc HS tra cứu, tìm kiếm thông tin trên hệ thống tài nguyên gần như "vô tận" trên các website, trong các thư viện điện tử. Mặt khác việc tăng cường giao lưu, hợp tác, trao đổi trong học tập giữa HS với HS, HS với GV đã không còn bị hạn chế về mặt thời gian và khoảng cách địa lý. Các phần mềm hỗ trợ, các phần mềm công cụ với giao diện "thân thiện" hỗ trợ rất nhiều cho GV và HS trong dạy và học.

Quá trình học tập HHKG của HS phụ thuộc nhiều vào trí tưởng tượng, tư duy trực quan, tư duy thị giác. HS sẽ tri giác vấn đề được nhiều hơn, sẽ nhận thức tốt hơn nếu những thông tin liên quan đến nội dung học tập tác động nhiều hơn đến các cơ quan cảm giác của các em. Với độ tuổi học trò, các em sẽ hứng thú hơn với PPDH trực quan. Bởi vậy việc sử dụng CNTT trong DH HHKG vừa có cơ sở khoa học, vừa làm tăng hiệu quả và chất lượng học tập.

Hiện nay hầu hết các trường phổ thông Việt Nam đều được quan tâm, đầu tư, trang bị các thiết bị về CNTT, tạo điều kiện thuận lợi cho việc ứng dụng CNTT vào DH các bộ môn. Tuy nhiên thực tế cho thấy hiệu quả của việc đầu tư này chưa cao. Một trong những nguyên nhân là chưa có nhiều những kết quả nghiên cứu giúp cho người GV thực hiện, học hỏi, vận dụng vào thực tiễn DH của mình. Những đóng góp của chúng tôi ở chương 2 hy vọng góp được một phần nhỏ vào việc thay đổi tình hình đó.

Chương 2

BIỆN PHÁP SỬ DỤNG PHẦN MỀM HÌNH HỌC ĐỘNG TRONG DẠY HỌC HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

2.1. Định hướng xây dựng các biện pháp

2.1.1. Định hướng 1. Các biện pháp nhằm góp phần làm rõ thêm cho lí luận về ứng dụng CNTT trong DH môn Toán, tìm ra hoặc làm rõ thêm những ứng dụng mới của CNTT trong DH HHKG.

Như đã trình bày ở chương 1, đã có không ít những công trình nghiên cứu trên thế giới và ở trong nước về sử dụng CNTT trong DH nói chung, trong DH môn Toán nói riêng. Chúng tôi không có tham vọng đóng góp những vấn đề về lí luận, mà chỉ góp phần làm sáng tỏ cho lí luận về ứng dụng CNTT trong DH môn Toán, tìm ra hoặc làm rõ thêm những ứng dụng mới của CNTT trong DH HHKG, khác với những nội dung đã có trong những công trình đã công bố. Chẳng hạn, sử dụng phần mềm GeoGebra để hỗ trợ DH về thủ pháp trải hình trong không gian, hay hỗ trợ kiểm nghiệm những phán đoán trong những bài toán. Những hoạt động này sẽ nêu bật tác dụng thực sự của CNTT trong DH môn Toán.

2.1.2. Định hướng 2. Các biện pháp cần đảm bảo tính phân hóa hướng vào cả đối tượng HS chưa khá và đối tượng HS khá trong học tập HHKG.

Với đối tượng HS chưa khá - còn hạn chế về trí tưởng tượng không gian, còn khó khăn trong việc xác định hình, cần lựa chọn những tình huống DH HHKG có trong SGK, trong đó việc vẽ hình, xác định hình hoặc hình dung ra hình không gian đang là một trở ngại, khó khăn cho GV và HS. Chẳng hạn, tình huống DH khái niệm mặt tròn xoay. Trong những tình huống đó cần trình bày rõ PP sử dụng CNTT và PPDH để người đọc thấy được ý

nghĩa, tác dụng của biện pháp đề xuất. Hoặc là cần chú ý sử dụng phần mềm vẽ hình để thiết kế mô hình trực quan hoặc phỏng thực tiễn phục vụ bài học. Thiết nghĩ, nếu chỉ bằng một câu viết trong SGK: "Cho hai đường thẳng (d) và (△) chéo nhau; khi (d) quay xung quanh (△) thì (d) sẽ tạo nên một mặt tròn xoay, gọi là mặt hypecboloit", sẽ không gây ấn tượng gì cho HS. Nhưng nếu dùng phần mềm hình học động, với chức năng tạo vết, di chuyển chậm, ta sẽ tạo ra mô hình trực quan, mô phỏng hiện tượng này. Qua đó HS chẳng những tri giác được hiện tượng, ghi nhớ kết quả tốt hơn, mà còn thấy được một vấn đề rất quan trọng trong thực tiễn là có thể xây dựng những công trình có dạng hypecboloit dựa trên những cây thép thẳng. Với những bài toán quỹ tích trong mặt phẳng, ta chỉ cần dựa vào ba điểm trở lên là có thể dự đoán quỹ tích là đường thẳng hay đường cong. Nhưng với HHKG, ta không thể làm như thế; vì vẽ hình biểu diễn của hình không gian hoặc là không thể hoặc là khó có thể vẽ chính xác được. Hơn nữa, hình biểu diễn chỉ bảo toàn tính chất của phép chiếu song song, không bảo toàn độ lớn của vật thật, nên không thể dựa trên một số điểm mà đoán được quỹ tích. Ngoại trừ những HS có trí tưởng tượng và tư duy lô-gíc tốt, phần lớn những HS khác đều khó nhận ra quỹ tích. Trong trường hợp này, nếu sử dụng tính năng tạo vết của phần mềm hình học động, những HS này có thể nhìn thấy được quỹ tích cần tìm và nhiệm vụ của các em là phải tìm cách lí giải về quỹ tích đó. Việc làm này sẽ làm giảm cơ hội phát triển tư duy của HS (đặc biệt là những HS có tư duy tốt), nhưng sẽ có lợi đối với những HS chưa có năng lực tư duy tốt; họ sẽ không phải rơi vào tình trạng bế tắc hoàn toàn khi giải dạng toán này.

Với đối tượng HS khá về trí tưởng tượng không gian, về tư duy toán học, cần thiết phải trang bị cho các em về thủ pháp trải hình. Trong HHKG có một cách giải toán là mở các mặt của một hình không gian và ghép chúng trên một mặt phẳng (Opening and Net). Chẳng hạn, có trường hợp ghép liền sáu

cạnh của một thiết diện thành một đoạn thẳng có độ dài không đổi, hay trải bốn mặt của một tứ diện ghép thành một hình vuông. Việc sử dụng thủ pháp này sẽ làm tăng sự hấp dẫn, tăng vẻ đẹp và sự độc đáo của Toán học. Ta có thể sử dụng CNTT hỗ trợ chuyển tải thủ pháp này cho HS.

2.1.3. Định hướng 3. Các biện pháp cần chú ý khai một tính năng "tuyệt vời" của một số phần mềm toán học; Đó là tính năng đo các đại lượng hình học: Đo độ dài đoạn thẳng, đo độ lớn góc…. Tính năng này chưa được nhiều người khai thác.

Trong quá trình giải bài toán ta thường phải sử dụng các hoạt động trí tuệ như dự đoán, phân tích. Song, việc chứng minh hay bác bỏ tính đúng sai của những dự đoán trong những bài toán nói trên cũng không phải là dễ, thậm chí phải mất nhiều thời gian và công sức. Trong tình huống này, nếu sử dụng phần mềm hình học động sẽ rất thuận lợi cho việc bác bỏ các phán đoán không đúng và hỗ trợ việc tìm tòi, khám phá ra tính chất của điểm cần tìm.

Sử dụng tính năng đo các đại lượng, chúng ta dễ dàng kiểm nghiệm tính đúng/ sai của mỗi phán đoán. Chẳng hạn: Tìm một điểm trên mặt phẳng nhìn hai điểm cho trước dưới góc lớn nhất. Bài toán này tưởng dễ dàng và có lời giải tương tự như bài toán: Tìm một điểm trên mặt phẳng có tổng khoảng cách đến hai điểm cho trước có giá trị nhỏ nhất. Nhưng không phải. Có không ít người đã đoán sai về điểm cần tìm trong bài toán này. Chỉ cần sử dụng tính năng đo góc của phần mềm toán học, ta có thể rút ngắn thời gian bác bỏ những phán đoán không đúng đó. Bên cạnh đó, với điểm mà máy tính (hoặc thiết bị nào đó) đã chỉ ra trên hình, ta có thể dựa vào các số liệu để khám phá ra tính chất của một yếu tố cần tìm trong bài toán.

2.1.4. Định hướng 4. Sử dụng phần mềm GeoGebra trong nội dung các biện pháp

Hiện nay có một số phần mềm Toán học có những tính năng tương tự như nhau, hỗ trợ cho việc DH, nghiên cứu, khám phá các khái niệm, định lí, quy tắc, thuật toán, giải toán HHKG ở trường THPT; Mỗi người nên chọn cho mình một phần mềm thích hợp. Chẳng hạn, có thể chọn các phần mềm hình học động, như Cabri 3D, Geometer's, Sketchpad, GeoSpace, GeoGebra, … trong DH HHKG. Mỗi phần mềm này đều có những ưu điểm và nhược điểm nhất định, nhưng chúng đều có tính năng biểu diễn hình không gian và tính năng động (dynamic). Chúng tôi tập trung vào việc khai thác và sử dụng phần mềm GeoGebra, bởi đây là phần mềm miễn phí (free), dễ sử dụng, tương thích với nhiều hệ điều hành.

2.2. Các biện pháp

2.2.1. Biện pháp 1. Sử dụng phần mềm hình học động để vẽ hình, hoặc tạo ra mô hình trực quan, mô hình phỏng thực tiễn giúp HS hiểu bài giảng

2.2.1.1. Cơ sở và ý nghĩa của biện pháp

Theo Nguyễn Bá Kim (2015) [22, tr 320]: Những phần mềm dạy học có khả năng phục vụ những ý đồ sư phạm như tạo ra môi trường tương tác để người học hoạt động và thích nghi với môi trường đó, tạo điều kiện cho người học hoạt động độc lập tới mức độ cao, tạo điều kiện thực hiện những ý tưởng trong dạy học.

Mô hình là một vật hay một hệ thống vật đóng vai trò đại diện hoặc thay thế cho vật hay hệ thống vật mà ta quan tâm nghiên cứu. Mô hình trực quan, mô hình phỏng thực tiễn sẽ hỗ trợ cho việc nghiên cứu không cần phải quan sát hình thật hoặc có mặt trong thực tiễn.

Khi mô tả khái niệm về mặt tròn xoay, SGK Hình học 12 nâng cao hiện hành [40] đã trình bày như sau: "Cho đường thẳng Δ. Xét một đường thẳng *d* song song với Δ, cách Δ một khoảng R. Mặt tròn xoay sinh bởi đường thẳng *d* như thế khi quay quanh Δ được gọi là mặt trụ tròn xoay". Định nghĩa mặt nón cũng tương tự.

Hầu hết các GV dạy Toán ở trường phổ thông đều thừa nhận rằng cần phải làm một cái gì đó để HS có thể hiểu được điều đó.

Đã có một số GV sử dụng đồ dùng DH như sau: Cho một hình chữ nhật làm bằng nhựa trong, quay xung quanh một cạnh của nó, để tạo ra mặt trụ như mô tả trên đây trong SGK. Thậm chí, có GV đã dính chặt cạnh hình chữ nhật được chọn làm trục quay vào trục của một mô tơ có công suất khá lớn. Song, thực tế cho thấy: khó có thể nhìn ra mặt trụ, mặt nón như thế.

Cũng có GV sử dụng video clip về người thợ làm gốm dùng bàn quay để tạo ra các vật hình tròn xoay giúp cho HS hiểu khái niệm này. Theo cách này, HS có thể nhận biết ra hình tròn xoay, nhưng cũng khó có thể nhận ra đâu là trục quay.

Để khắc phục những hạn chế đó, giải pháp của chúng ta là: Sử dụng phần mềm có tính năng tạo vết trong quá trình quay, giúp cho HS thấy rõ hơn sự tạo ra các mặt tròn xoay.

Tương tự, trong bài đọc thêm về giao tuyến của mặt trụ tròn xoay và mặt phẳng trong SGK nâng cao [40] có hình vẽ minh họa cho nội dung này.

Tuy nhiên thực tế cho thấy rất ít GV quan tâm đến bài đọc này. Thật đáng tiếc nếu sau khi học về hình tròn xoay, khối tròn xoay, mà HS không thể hiểu tại sao một cốc nước đặt nghiêng so với mặt đất thì mặt nước trong cốc (nếu có) lại có hình elip!

Chúng tôi đã phỏng vấn hơn 500 GV Toán THPT trong các năm 2014, 2015, 2016, 2017 bao gồm các GV tham dự các lớp bồi dưỡng giáo viên hàng năm thuộc một số tỉnh: Cần Thơ, Trà Vinh, Kiên Giang, Phú Thọ… và những

học viên Cao học các khóa tương ứng trong những năm này của các trường Đại học (ĐH): ĐH Sư phạm Hà Nội, ĐH Sư phạm - ĐH Thái Nguyên, ĐH Đồng Tháp, ĐH Hùng Vương, ĐH Tây Bắc, ĐH Hải Phòng. Các câu phỏng vấn của chúng tôi và kết quả trả lời tương ứng như sau:

(1) Thầy cô nào có thể giải thích được: Khi một chiếc cốc hình trụ đựng nước được đặt nghiêng so với mặt đất thì mặt nước có hình elip?

(Kết quả: Có khoảng 2% số GV được hỏi trả lời là có thể giải thích được)

(2) Với các thầy/ cô đã giải thích được hiện tương ở câu 1, thì theo các thầy cô việc giải thích cho HS hiểu điều đó có dễ dàng không? Có mất nhiều thời gian hay không?

(Kết quả: Các GV đều cho rằng việc giải thích cho HS hiểu điều đó là không dễ dàng và mất nhiều thời gian)

(3) Thầy, cô nào đã biết khi cắt mặt nón tròn xoay bằng một mặt phẳng không qua đỉnh nón và không vuông góc với trục của nó thì giao tuyến là đường gì? (Câu này trong Bài đọc thêm ở trang 57-59 SGK [40]).

(Kết quả: Có khoảng 50% số giáo viên đã biết)

(4) Thầy, cô nào giải thích được vì sao thiết diện là đường cônic?

(Kết quả: 0%)

Khi tìm hiểu sâu hơn về nguyên nhân dẫn đến tình hình như đã trình bày ở trên, chúng tôi được biết rằng: Có nhiều lí do, trong đó có lí do là Bài đọc thêm trong SGK không gây ấn tượng gì đối với GV.

Ta có thể sử dụng phần mềm hình học động, chẳng hạn phần mềm GeoGebra hoặc phần mềm Geometer’s Sketchpad để tạo ra mô hình trực quan, mô hình phỏng thực tiễn giúp GV và HS hiểu được những điều đó.

Theo nghĩa từ điển: Mô hình được hiểu là một hệ thống được hình dung trong đầu hoặc được thực hiện bằng vật chất phản ánh hay tái tạo lại đối tượng nghiên cứu. Mô hình Toán học là mô hình được tạo nên bởi toán học (thông qua công thức, phương trình, ký hiệu toán học...).[29]

Ý nghĩa của mô hình: Mô hình là vật trung gian dùng để nghiên cứu đối tượng nào đó. Mô hình là một vật hay một hệ thống vật đóng vai trò đại diện hoặc vật thay thế cho "vật" hay một "hệ thống vật" mà ta quan tâm nghiên cứu; hoặc mô hình là một hệ thống được hình dung trong bộ óc hoặc được thực hiện bằng vật chất phản ánh hay tái tạo lại đối tượng nghiên cứu.

Người ta thường tạo ra mô hình để nghiên cứu đối tượng nào đó, gọi là *mô hình hóa*. Trong đó mô *hình Toán học hóa* là dùng mô hình toán học để nghiên cứu một vấn đề nào đấy; là quá trình lựa chọn và sử dụng toán học một cách thích hợp nhằm phân tích các tình huống thực tế để hiểu rõ thực tế đó hơn.

Có một số thực tế nhưng thực tiễn rất khó có thể hoạt động được trong môi trường thực tế đó, người ta thường dùng mô hình để mô phỏng thực tiễn. Tuy không phải là thực tiễn thật, nhưng mô hình phỏng thực tiễn cũng có những giá trị nhất định.

2.2.1.2. Thiết kế một số tình huống sử dụng biện pháp

Tình huống 1.1. Mặt tròn xoay và thiết diện cônic

Hoạt động trên lớp

Hoạt động 1. Tạo ra mặt tròn xoay

GV: Hình 6 vẽ đường tròn (O) tiếp xúc với ba cạnh hình chữ nhật.

Khi ta quay hình 6 xung quanh trục A_1D_1 ta được những hình gì?

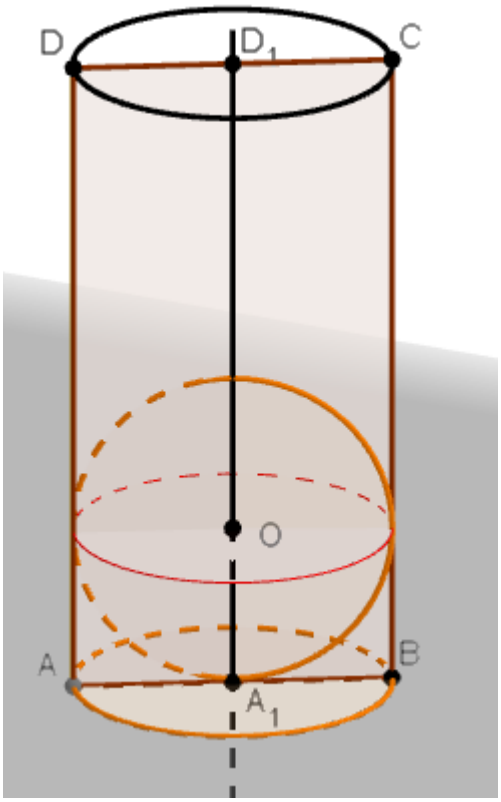
Chi tiết hơn:

- Điểm *A* quay thành hình gì?
- Đoạn *AD* quay thành hình gì?
- Đường tròn (O) quay thành hình gì?
- Hình chữ nhật quay thành hình gì?

HS:

- Điểm *A* quay thành đường tròn

- Đoạn *AD* quay thành các mặt trụ
- Đường tròn (O) quay thành mặt cầu
- Hình chữ nhật quay thành hình trụ



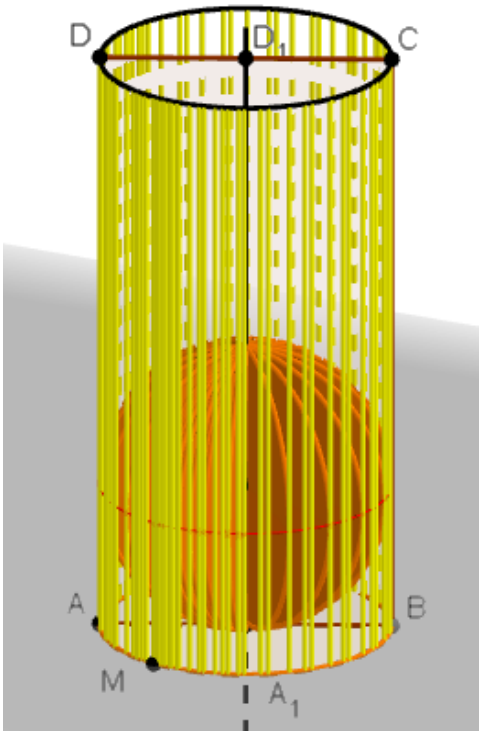
Hình 6. Mặt trụ tròn xoay

Hoạt động 2. Hướng dẫn HS tiếp cận khái niệm

GV. Em có thể nói gì về mối quan hệ:

- Giữa mặt cầu (O) và mỗi đường thẳng do cạnh AD và cạnh AB của hình chữ nhật khi quay tạo nên (giống như một chiếc que đặt sát vào một quả bóng) ?

- Giữa mặt cầu (O) và mặt phẳng chứa đường tròn do đáy hình chữ nhật khi quay tạo nên (giống như quả bóng đặt trên mặt bàn) ?



Hình 7. Đường sinh của mặt trụ

HS:

- Mỗi đường thẳng do cạnh AD và cạnh AB của hình chữ nhật khi quay luôn tiếp xúc với mặt cầu.

- Mặt cầu (O) tiếp xúc với mặt phẳng do cạnh AB của hình chữ nhật khi quay tạo nên.

Hoạt động 3. GV hợp thức hóa một số khái niệm và một số tính chất rút ra từ những hoạt động trên.

Những khái niệm: Mặt cầu, mặt trụ, thiết diện, tiếp diện, tiếp tuyến, tiếp xúc, mặt cầu nội tiếp, đường tròn lớn.

Các tính chất:

- Mỗi đường sinh của mặt trụ đều là tiếp tuyến của mặt cầu nội tiếp nó;

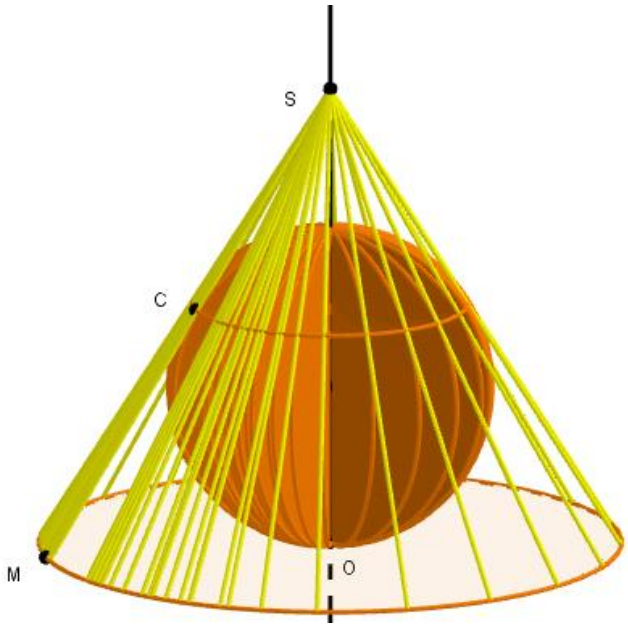
- Mọi đường thẳng trong mặt phẳng tiếp diện của mặt cầu đi qua tiếp điểm đều là tiếp tuyến của mặt cầu;

- Hai tiếp tuyến của mặt cầu xuất phát từ cùng một điểm thì bằng nhau.

Hoạt động 4. Tương tự

GV: Tương tự, ta có thể sử dụng phần mềm GeoGebra tạo ra mặt nón: Vẽ một tam giác cân có đường tròn nội tiếp và quay hình này xung quanh đường cao qua đỉnh của nó và tâm đường tròn, ta được một mặt nón tròn xoay và một mặt cầu nội tiếp mặt nón đó. Trong quá trình quay (chậm) mỗi vị trí của hai cạnh tam giác cân tạo nên những đường sinh của mặt nón. (Hình 8)

Chú ý: Nếu không có phần mềm hình học động, khó có thể nhìn thấy được điều này.

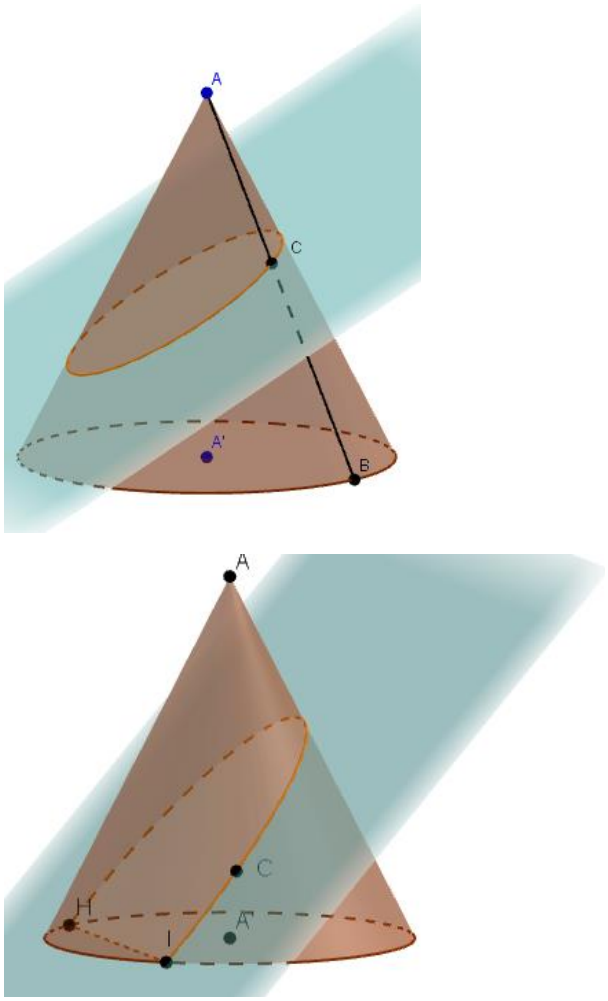


Hình 8. Đường sinh mặt nón tiếp xúc với mặt cầu

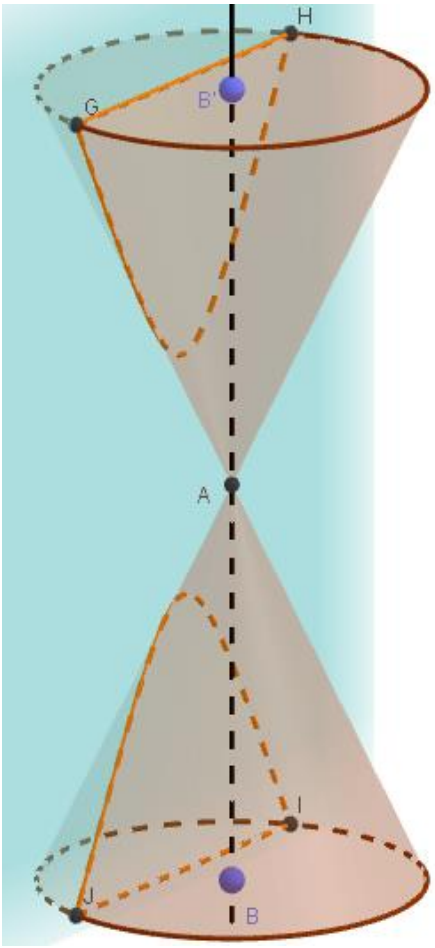
Hoạt động 5. Thiết diện cônic

GV: Sử dụng phần mềm hình học động mô tả hình ảnh cắt một mặt nón tròn xoay bằng một mặt phẳng ở những vị trí khác nhau.

- Nếu mặt cắt vuông góc với trục hình nón thì thiết diện là một hình tròn;
- Nếu mặt cắt xiên góc với trục hình nón thì thiết diện là một hình elip;
- Nếu mặt cắt song song với một đường sinh của hình nón thì thiết diện là một hình parabol. (Hình 9)
- Nếu mặt cắt song song với trục hình nón thì thiết diện là một hình hypecbol. (Hình 10)



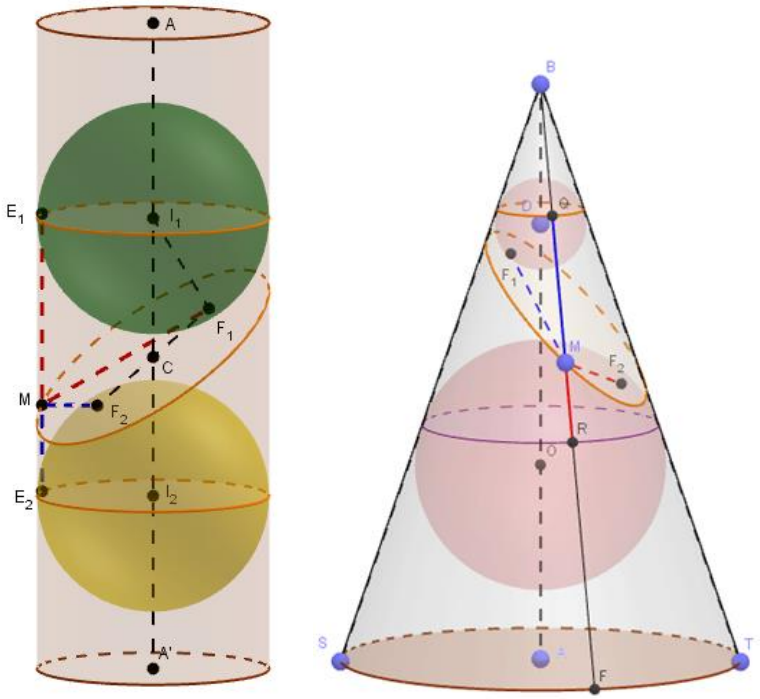
Hình 9. Thiết diện là Elip, Parabol



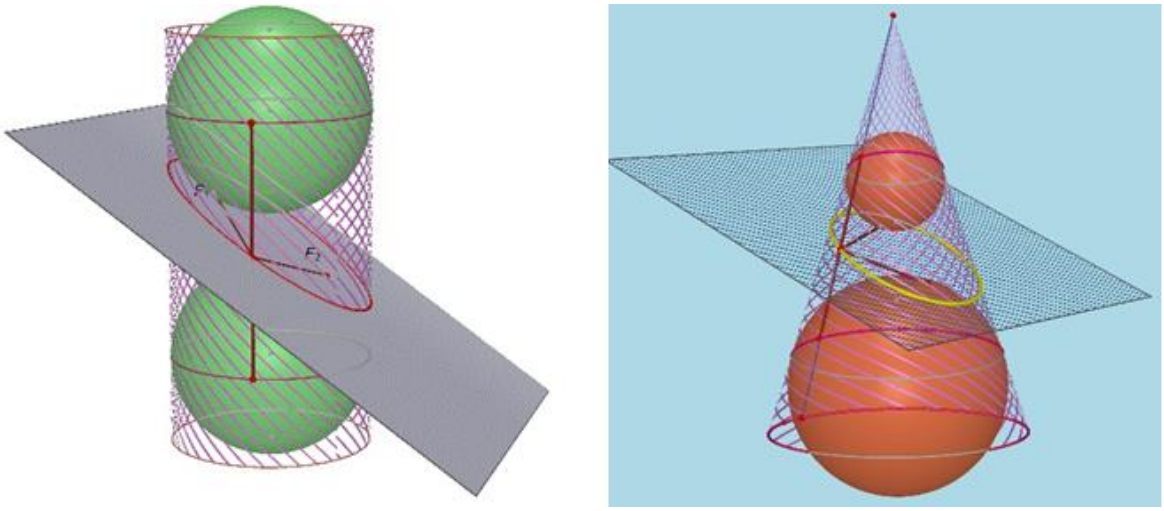
Hình 10. Thiết diện là hypecbol

Hoạt động 6. Dẫn dắt chứng minh thiết diện conic.

GV: Hình 11 vẽ một mặt phẳng (p) cắt tất cả các đường sinh của mặt trụ và không vuông góc với trục hình trụ. Về hai phía của (p) có hai mặt cầu tâm (I_1), tâm (I_2) vừa tiếp xúc với (p), vừa tiếp xúc với mặt trụ. Gọi F_1, F_2 lần lượt là các tiếp điểm của (p) với mỗi mặt cầu (I_1), (I_2). M là một điểm bất kì trên giao tuyến của mặt phẳng (p) và mặt trụ; Đường sinh của mặt trụ đi qua điểm M có điểm chung duy nhất với các mặt cầu (I_1), (I_2) lần lượt tại E_1, E_2. Hãy phát hiện các cặp tiếp tuyến bằng nhau từ M đến từng mặt cầu.



Hình 11. Thiết diện cônic vẽ bằng phần mềm GeoGebra



Hình 12. Thiết diện cônic vẽ bằng phần mềm Geometer's Sketchpad

HS: ta có các cặp tiếp tuyến bằng nhau :

$MF_1 = ME_1$

$MF_2 = ME_2$.

Cộng hai đẳng thức trên, ta được $MF_1 + MF_2 = E_1E_2 = I_1I_2$ không đổi.

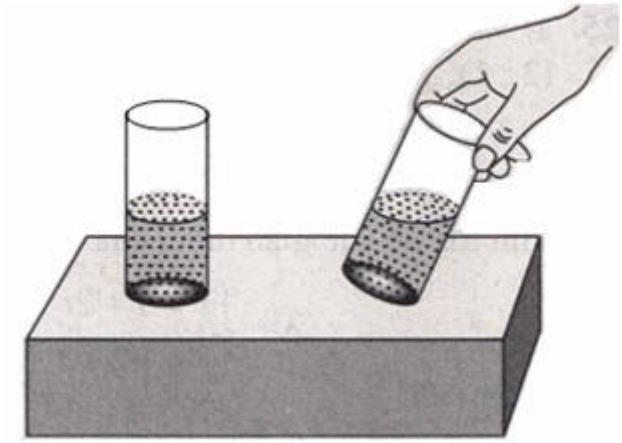
Vậy thiết diện là elip nhận F_1, F_2 là hai tiêu điểm, độ dài trục lớn bằng đoạn I_1I_2.

GV: Tương tự, một mặt phẳng cắt tất cả các đường sinh của mặt nón và không vuông góc với trục của mặt nón thì thiết diện là một elip.

Hãy lấy một số hình ảnh thực tế về thiết diện cônic!

HS:

- Cốc nước hình trụ đặt nghiêng sẽ có mặt nước hình elip. (Hình 13)
- Cắt vát một ống nước, ống tre/ nứa.
- Bóng nắng của một quả bóng.



Hình 13. Cốc nước hình trụ đặt nghiêng sẽ có mặt nước hình elip

Như vậy: Ta có thể sử dụng phần mềm vẽ hình và tính năng tạo vết của chúng để thấy rõ hơn những mô hình mô phỏng thực tiễn hoặc những hình vẽ trực quan, sinh động, giúp ta hiểu bài hơn, hứng thú học tập hơn. GV cần lựa chọn những tình huống đã được nói đến trong SGK, nhưng khó có điều kiện thực hiện trong thực tiễn, thiết kế mô hình phỏng thực tiễn dựa trên những phần mềm hỗ trợ vẽ hình.

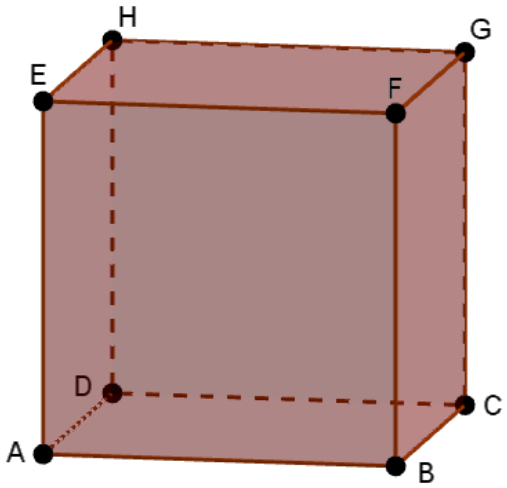
Tình huống 1.2. Minh họa công thức thể tích khối chóp

SGK Hình học 12 hiện hành [40] có giới thiệu và cho HS thừa nhận công thức thể tích khối chóp. Tuy nhiên, để bớt đi sự khó chịu vì phải thừa nhận, GV có thể minh họa công thức thể tích khối chóp thông qua hoạt động

sau: Ta có thể chỉ ra rằng thể tích khối lập phương, cạnh a, bằng ba lần thể tích khối chóp có đáy là hình vuông cạnh a, một cạnh bên bằng a và vuông góc với đáy.

Hoạt động trên lớp

GV: Cho hình lập phương ABCD.EFGH. Hãy dùng hai mặt phẳng chia khối lập phương cạnh a thành ba phần bằng nhau. (Hình 14)



Hình 14. Chia thể tích khối lập phương thành thể tích 3 khối chóp bằng nhau

HS: Suy nghĩ và thực hiện yêu cầu của GV.

GV: Trong trường hợp không có HS nào làm được, cần hướng dẫn chi tiết hơn: Hãy chia khối lập phương thành ba khối chóp có đáy là một mặt của khối lập phương, một cạnh bên vuông góc với đáy chính là một cạnh của khối lập phương.

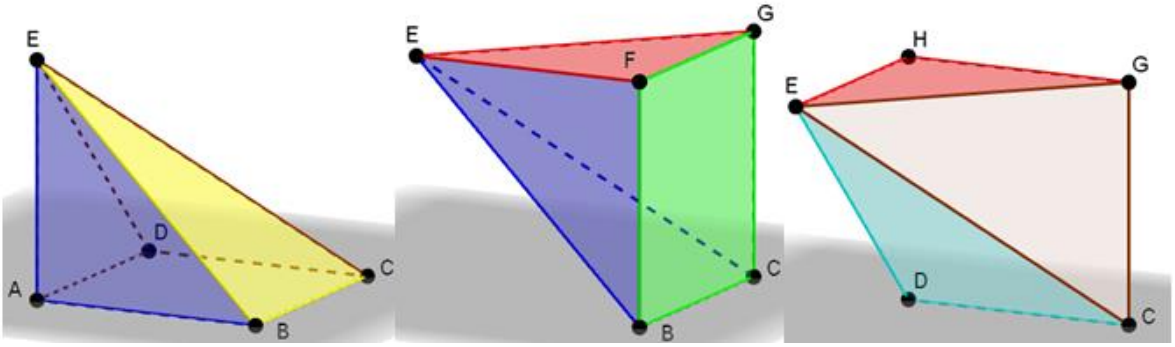
HS: Suy nghĩ và thực hiện yêu cầu của GV.

GV: Hướng dẫn HS sử dụng phần mềm thực hiện yêu cầu trên.

Kết quả này cho ta công thức thể tích khối chóp đặc biệt $V = \frac{1}{3}Bh$ với đáy là hình vuông cạnh a, một cạnh bên là chiều cao và có độ dài cũng bằng a.

Nếu HS chỉ vẽ hình mà đã tưởng tượng ra cách phân chia này thì thật là tuyệt vời; hoặc nếu có những khối hình thật, bằng gỗ/ nhựa chẳng hạn, để lắp

ghép minh họa cho bài toán thì rất tốt. Tuy nhiên, với CNTT làm được như trên cũng không kém tính hiệu quả, nhưng đơn giản và tiện lợi hơn.

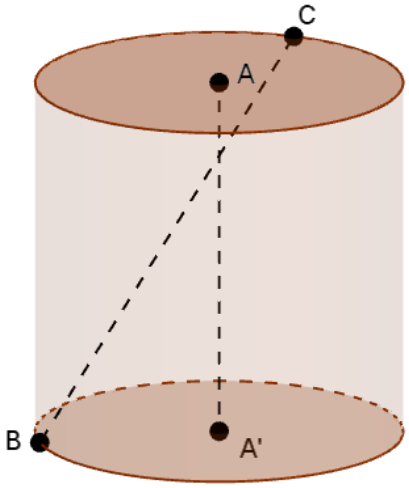


Hình 15. Ghép ba khối chóp bằng nhau ở trên ta được một khối lập phương.

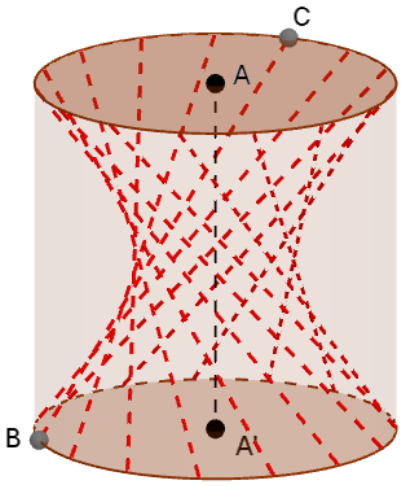
Tình huống 1.3. Tạo ra các mặt hypeboloit

Trong SGK Hình học 12 [40] có ví dụ: "*Cho hai đường thẳng l và Δ chéo nhau. Xét hình tròn xoay sinh bởi đường thẳng l khi quay quanh đường thẳng Δ. Hình tròn xoay nhận được gọi là mặt hypeboloit tròn xoay một tầng*".

GV có thể minh họa hoặc hướng dẫn cho HS minh họa cho ví dụ trên bằng cách sử dụng phần mềm GeoGebra tạo nên hình 16 và hình 17.



Hình 16. A'A và BC chéo nhau



Hình 17. Mặt hypecboloit

2.2.2. Biện pháp 2. Sử dụng phần mềm hình học động hỗ trợ giải toán quỹ tích hoặc hỗ trợ phát hiện yếu tố bất biến, yếu tố cần tìm trong bài toán Hình học không gian

2.2.2.1. Cơ sở và ý nghĩa của biện pháp

Theo nghĩa Hán – Việt: Quỹ tích là quỹ đạo (đường đi) của một vật. Một hình *(H)* được gọi là quỹ tích của các điểm *M* có tính chất *T* (hay tập hợp các điểm *M* có tính chất *T*) khi và chỉ khi nó chứa các điểm có tính chất *T***.** Bài toán tìm quỹ tích trong Hình học là bài toán tìm tập hợp điểm thỏa mãn một hoặc một số tính chất hay một thuộc tính nào đó.

Lời giải bài toán quỹ tích gồm ba phần:

Phần thuận. Chỉ ra điểm cần tìm quỹ tích thuộc một tập hợp *(H)* nào đó.
Trong bước này, dựa vào dữ kiện của đề bài, cần phải dự đoán tập hợp điểm (H) chứa điểm cần tìm quỹ tích là tập gì? Có thể dựa vào những vị trí đặc biệt, những tính chất đặc biệt để dự đoán. Sau đó phải lập luận một cách lôgic, chặt chẽ để chỉ ra điểm cần tìm quỹ tích thuộc một tập hợp *(H)* nào đó. Chú ý giới hạn quỹ tích, tức là tập hợp điểm cần tìm quỹ tích có thể chỉ là một bộ phận (tập con) của tập hợp đã chỉ ra.
Phần đảo. Lấy một điểm bất kì trong tập hợp *(H)* (đã giới hạn) ở phần thuận, chứng minh rằng điểm này thỏa mãn điều kiện của đề bài, tức là có một trường hợp của bài toán tương ứng với điểm này. Thực chất của phần này là bài toán dựng hình (bài toán xác định hình) ứng với điểm đã lấy bất kì trong tập hợp *(H)*.
Kết luận: Tập hợp điểm cần tìm quỹ tích là hình *(H)*/tập hợp *(H)*.

Như vậy, điều cơ bản của bài toán tìm quỹ tích là phát hiện xem trong quá trình thay đổi vị trí (di động) một điểm nào đó có đường đi như thế nào.

Có một số dạng toán khác trong hình học có liên quan tới dạng toán quỹ tích, như:

Dạng (i): Chứng minh một điểm nào đó trong bài toán thuộc một tập hợp *(H)*. Dạng này chỉ là một phần của bài toán quỹ tích, dễ hơn phần thuận của bài toán quỹ tích vì tập hợp *(H)* đã được chỉ ra trước hoặc chỉ ra một phần. Chẳng hạn bài toán: Trong mặt phẳng *(P)* cho đường tròn đường kính *AB* và một điểm *C* di chuyển trên đường tròn đó, *SA* là đoạn thẳng vuông góc với mặt phẳng *(P)*. Gọi *H* là hình chiếu của *A* trên *SC*. Chứng minh rằng *H* luôn thuộc một đường tròn cố định.

Dạng (ii): Xác định hình thỏa mãn một (một số) điều kiện cho trước. Chẳng hạn bài toán: Cho điểm *G* nằm bên trong góc tam diện vuông *O.xyz*. Xác định ba điểm: điểm *A* thuộc *Ox*, điểm *B* thuộc *Oy*, điểm *C* thuộc *Oz*, sao cho tam giác *ABC* nhận *G* là trọng tâm. Dạng toán này tựa như phần đảo của một bài toán quỹ tích.

Trong cuốn "Giải bài toán như thế nào, phần hai – Tiến tới một phương pháp tổng quát" [31], G. Polya đã đề cập đến phương pháp hai quỹ tích và phương pháp ba quỹ tích. Ông "gọi một tập hợp nào đó là một quỹ tích nếu nó xuất hiện theo một cách đặc trưng nào đó trong quá trình giải toán" [31]. Ông đã đưa ra một ví dụ thú vị về "thiết kế một cái nút chai "vạn năng" có thể đậy khít ba kiểu miệng chai khác nhau: tròn, vuông và tam giác; đường kính đường tròn bằng độ dài cạnh hình vuông và cạnh hình tam giác [31]. Hình dạng cái nút chai này là giao của ba hình: một hình trụ tròn xoay và hai hình lăng trụ đều, có đáy lần lượt là hình tròn, hình vuông và hình tam giác đã cho.

Nhiều giáo viên và HS cho rằng, dạng toán qũy tích là một trong những dạng toán thách thức đối với HS.

Một dạng toán khác cũng thuộc dạng toán khó đối với HS là dạng toán tìm giá trị lớn nhất (GTLN) hoặc giá trị nhỏ nhất (GTNN) của một đại lượng hình học. Chẳng hạn bài toán: Trong không gian cho hình vuông *ABCD*. Gọi *M* là điểm nhìn *AB* và nhìn *AD* dưới góc vuông. Xác định vị trí của *M* để thể tích khối chóp *M.ABCD* lớn nhất.

Để giải được dạng toán này, HS cần phải tìm ra được yếu tố bất biến trong bài toán. Với bài này, HS cần thấy được điểm M luôn thuộc một đường tròn cố dịnh. Nếu không sẽ không giải được bài toán.

2.2.2.2. Thiết kế một số tình huống áp dụng biện pháp

Chúng ta có thể hướng dẫn HS sử dụng một số phần mềm hình học động để hỗ trợ, giảm bớt khó khăn trong giải toán quỹ tích hoặc dạng toán liên quan đến yếu tố bất biến trong HHKG. Sau đây chúng tôi đề xuất một số tình huống giúp GV có thể khai thác và hướng dẫn HS sử dụng CNTT hỗ trợ giải toán quỹ tích hoặc hỗ trợ phát hiện yếu tố bất biến trong bài toán HHKG.

Các tình huống được chúng tôi sắp xếp từ dễ đến khó, từ đơn giản đến phức tạp, theo hai nhóm: Nhóm thứ nhất gồm những bài toán tìm quỹ tích, nhóm thứ hai dựa trên quỹ tích để phát hiện những yếu tố bất biến trong bài toán để tìm ra GTLN hoặc GTNN của một đại lượng hình học.

Tình huống 2.1. Trong không gian cho hình vuông *ABCD*. Gọi *M* là điểm không thuộc mặt phẳng (*ABCD)*, *M* nhìn *AB* và nhìn *AD* dưới góc vuông. Xác định vị trí của *M* để thể tích khối chóp *M.ABCD* lớn nhất.

Các hoạt động trên lớp

GV: Với giả thiết điểm *M* nhìn *AB* dưới góc vuông có gợi ra cho các em hình ảnh nào quen thuộc trong HHKG hoặc gợi ra cách vẽ hình như thế nào hay không?

HS: M thuộc mặt cầu đường kính *AB* (trừ điểm A và điểm B).

GV: Hãy sử dụng phần mềm GeoGebra để vẽ hình.

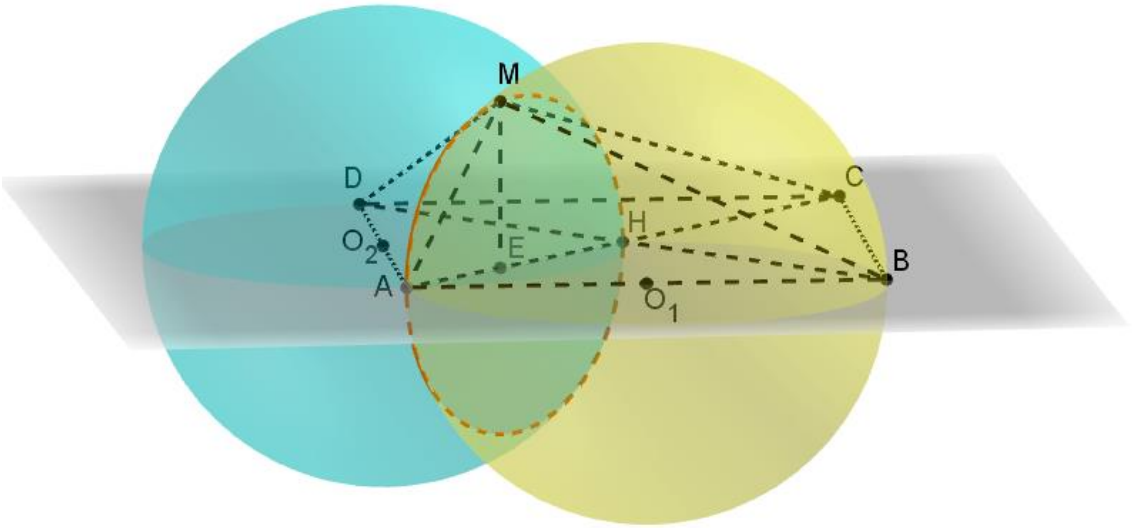
HS: Sử dụng phần mềm GeoGebra vẽ mặt cầu đường kính *AB* và mặt cầu đường kính *AD*.

GV: Với giả thiết điểm *M* vừa nhìn *AB*, vừa nhìn AD dưới góc vuông, gợi ra cho các em hoạt động vẽ hình gì tiếp theo?

HS: Lấy giao của hai mặt cầu trên.

GV: Có thể suy ra tính chất gì của điểm *M*?

HS: *M* thuộc đường tròn giao của hai mặt cầu trên, trừ hai điểm *A* và tâm *H* của hình vuông *ABCD*.



Hình 18. M thuộc đường tròn giao của hai mặt cầu

GV: Khối chóp *M.ABCD* có yếu tố nào không đổi, yếu tố nào thay đổi? Thể tích khối chóp *M.ABCD* lớn nhất khi nào?

HS: Khối chóp *M.ABCD* có đáy *ABCD* không đổi, chiều cao khối chóp là khoảng cách từ M đến mặt phẳng (*ABCD*) thay đổi. Thể tích khối chóp M.ABCD lớn nhất khi khoảng cách này lớn nhất.

GV: Vị trí nào của điểm M trên đường tròn giao của hai mặt cầu nói trên cho ta khoảng cách từ M đến mặt phẳng (*ABCD*) lớn nhất?

HS: Khi M là điểm chính giữa nửa đường tròn AH của đường tròn nói trên, với H là tâm hình vuông ABCD.

Tóm tắt lời giải bài toán

Do M nhìn AB và nhìn AD dưới góc vuông nên M thuộc đường tròn giao của mặt cầu đường kính AB và mặt cầu đường kính AD, trừ hai điểm A và H. Đó là đường tròn, đường kính AH, với H là tâm hình vuông ABCD, trong mặt phẳng qua AH vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

Khối chóp M.ABCD có đáy ABCD không đổi, nên thể tích khối chóp lớn nhất khi chiều cao khối chóp là khoảng cách từ M đến mặt phẳng (ABCD) lớn nhất, khi M là điểm chính giữa nửa đường tròn đường kính AH trong mặt phẳng qua AH vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

Tình huống 2.2.

Trong không gian cho tam giác đều ABC cạnh a. Trên đường thẳng d qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có điểm M di động. Gọi H là trực tâm tam giác MBC. Xác định vị trí của M để thể tích khối chóp H.ABC lớn nhất.

Các hoạt động trên lớp

GV: Các em hãy phán đoán xem điểm H sẽ di động như thế nào?

HS: Trường hợp đặc biệt, khi M trùng A thì H trùng với tâm O của tam giác ABC; Điểm M có thể di chuyển theo hai hướng của đường thẳng d nên tập hợp điểm H có tính chất đối xứng qua mặt phẳng (ABC).

GV: Có thể vẽ thêm một vài trường hợp đặc biệt của H để dự đoán chính xác hơn về tập hợp điểm H, hay không ?

HS: Vì hình biểu diễn của hình không gian khó có thể chính xác như vẽ trong mặt phẳng nên kết quả dự đoán có thể không đúng.

GV: Vậy ta có thể làm gì để khắc phục điều đó ?

HS: Có thể sử dụng phần mềm hình học động.

GV: Sử dụng phần mềm hình học động để tạo ra một vài vị trí của điểm H, làm cơ sở để HS phán đoán về tập hợp điểm H. (Hình 19a)

GV: Các em hãy sử dụng phần mềm hình học động để kiểm nghiệm phán đoán của mình đúng hay sai, bằng cách tạo vết cho điểm H khi M di động trên đường thẳng d. Các em có nhân xét gì về tập hợp điểm H ?

HS: Dự đoán tập hợp điểm H là một cung tròn.

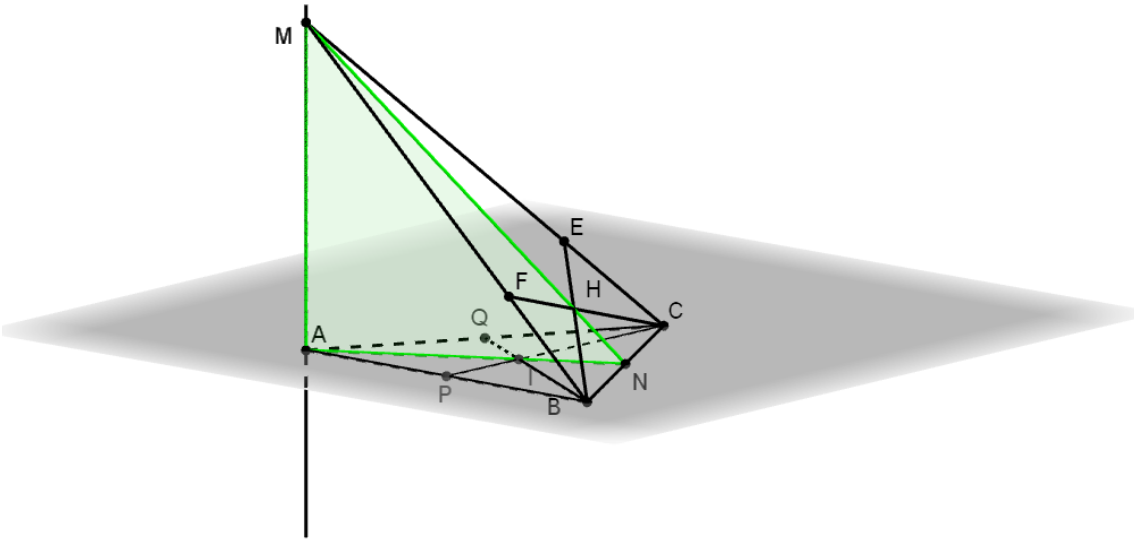
GV: Cung tròn trong mặt phẳng nào ?

HS: Cung tròn thuộc mặt phẳng tạo bởi d và điểm O.

GV: Mặt phẳng này có tính chất gì ?

HS: Vì d vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên (p) vuông góc với mặt phẳng (ABC).

GV: Hãy tìm hiểu kĩ hơn về tập hợp điểm H.



Hình 19. Tìm tập hợp điểm H khi M chạy trên d

HS: H thuộc cung tròn qua O và N, trong mặt phẳng (P). (Hình 19b)

GV: Việc chứng minh kết quả trên là đúng chúng ta sẽ trở lại sau. Vậy khi nào thể tích khối chóp H.ABC lớn nhất?

HS: Khi khoảng cách từ H đến mặt phẳng (ABC) lớn nhất, khi H ở chính giữa cung tròn ON trong mặt phẳng (P).

GV: Khi đó M ở đâu?

HS: Khi đó góc ANM bằng 45^0 nên AM = AN.

GV: Trở lại chứng minh OH vuông góc với MN?

……..

Tóm tắt lời giải bài toán

Gọi N là trung điểm BC, O là tâm tam giác ABC. Do tam giác MBC cân tại M nên MN vuông góc với BC, suy ra mặt phẳng (AMN) vuông góc với BC, OH vuông góc với BC (i). Lại có CO vuông góc với mặt phẳng (ABM), suy ra CO vuông góc với SB. Kết hợp với CH vuông góc với SB, suy ra OH vuông góc với SB (ii).

Từ (i) và (ii) suy ra OH vuông góc với mặt phẳng (MBC), suy ra OH vuông góc với MN. Vậy H thuộc đường tròn đường kính ON, trong mặt phẳng (P) tạo bởi AN và d.

Thể tích khối chóp H.ABC lớn nhất khi khoảng cách từ H đến mặt phẳng (ABC) lớn nhất, khi H ở chính giữa nửa đường tròn ON trong mặt phẳng (P). Khi đó góc ANM bằng 45^0 nên AM = AN. Điều kiện này xác định vị trí điểm M cần tìm.

Tình huống 2.3. Trong không gian cho một mặt phẳng (P) cố định và và một điểm O cố định trong (P). Xét đường thẳng d trong mặt phẳng (P), quay xung quanh điểm O. Cho A là một điểm cố định ở ngoài mặt phẳng (P). Tìm quỹ tích hình chiếu H của A trên d, trong quá trình d quay xung quanh O trong mặt phẳng (P).

Các hoạt động trên lớp

GV: Hãy sử dụng phần mềm GeoGebra để hỗ trợ giải bài toán. Không mất tổng quát ta có thể coi (P) là mặt phẳng [Oxy], với O là gốc tọa độ. Lấy A là điểm bất kì ở ngoài mặt phẳng Oxy.

Làm thế nào để vẽ đường thẳng d quay quanh điểm O, trong mặt phẳng (P)?

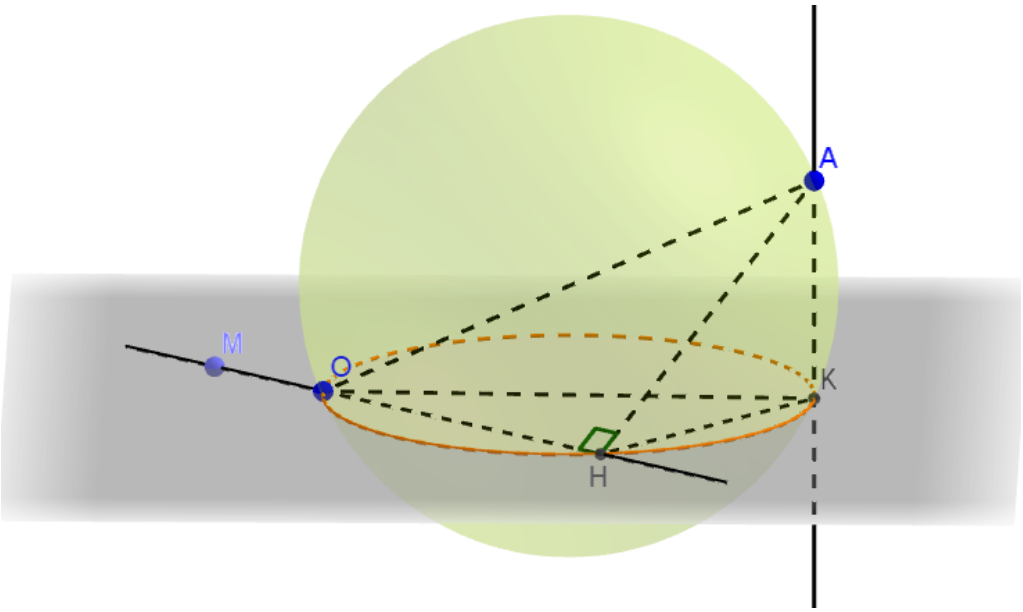
HS: Vẽ đường tròn (C) tâm O với bán kính bất kì và lấy điểm M trên đó. Vẽ d là đường thẳng qua hai điểm O và M.

GV: Có những cách nào để xác định hình chiếu H của A trên d?

HS:

Cách 1. Vì AH vuông góc với HO nên H thuộc mặt cầu đường kính AO và H là giao điểm của mặt cầu này và d.

Cách 2. Vì AH vuông góc với d nên H thuộc mặt phẳng qua A và vuông góc với d, suy ra H là giao điểm của mặt phẳng này và d.



Hình 20. H thuộc giao của hai mặt

GV: Sử dụng phần mềm hình học động tạo ra một số vị trí của điểm H. Em hãy dự đoán xem đường đi của H khi M di chuyển trên (C) là đường gì ?

HS: Là đường tròn qua O trong mặt phẳng (Oxy).

GV: Hãy mô tả về đường tròn đó, tức mô tả về quỹ tích của điểm H.

HS: Quỹ tích của H là đường tròn giao giữa mặt phẳng (P) và mặt cầu đường kính AO. Hoặc: Quỹ tích của H là đường tròn trong mặt phẳng (P) có đường kính AK, với K là hình chiếu của A trên mặt phẳng (P).

Tóm tắt lời giải bài toán

Cách 1. Do H thuộc d, d nằm trong (P), nên H thuộc (P). AH vuông góc với d nên H nhìn AO đưới góc vuông, suy ra H thuộc mặt cầu đường kính AO. Vậy tập hợp điểm H là đường tròn giao giữa mặt phẳng (P) và mặt cầu đường kính AO.

Cách 2. Do H thuộc d, d nằm trong (P), nên H thuộc (P). Gọi K là hình chiếu của A trên mặt phẳng (P). Do AH vuông góc với d nên KH vuông góc với d (Định lí ba đường vuông góc). Suy ra H nhìn KO đưới góc vuông. Vậy tập hợp điểm H là đường tròn đường kính KO trong mặt phẳng (P).

Tình huống 2.4. Trong không gian cho một đường thẳng d cố định và một điểm A cố định, A không thuộc d. Xét mặt phẳng (P) thay đổi, luôn đi qua d. Tìm quỹ tích hình chiếu H của A trên mặt phẳng (P) khi mặt phẳng (P) thay đổi.

Các hoạt động trên lớp

GV: Hãy sử dụng phần mềm GeoGebra để vẽ hình cho bài toán. Không mất tổng quát ta có thể d là trục Oz và A là điểm bất kì ở ngoài d.

Làm thế nào để vẽ mặt phẳng (P) thay đổi, luôn đi qua d?

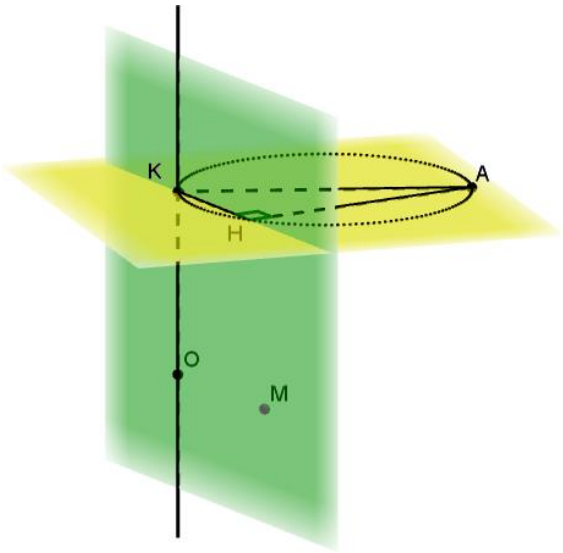
HS: Vẽ đường tròn (C) tâm O với bán kính bất kì và lấy điểm M trên đó; vẽ mặt phẳng (P) qua d và M.

GV: Vẽ đường thẳng qua A và vuông góc với (P). Các em có dự đoán H thuộc tập hợp cố định nào không?

HS: Suy nghĩ và trả lới câu hỏi.

GV: Ta có thể tạo vết cho H khi M di chuyển trên (C). Có nhận xét gì về đường đi của H?

HS: Nhận xét: H thuộc một đường tròn qua A. (Hình 21)



Hình 21. Quỹ tích của H khi (P) quay quanh d

GV: Có nhận xét gì về mặt phẳng chứa đường tròn quỹ tích của H?

HS: Đó là mặt phẳng qua A và vuông góc với d.

GV: Có thể chứng minh điều đó như thế nào?

HS: AH vuông góc với (P), d thuộc (P), nên AH vuông góc với d. Vậy AH thuộc mặt phẳng qua A vuông góc với d.

GV: Gọi (Q) là mặt phẳng qua A vuông góc với d. Vậy quỹ tích của H là đường tròn nào trong (Q)?

HS: Quỹ tích của H là đường tròn đường kính AK trong (Q), với K là giao điểm của d và (Q).

GV: Hãy thể hiện điều đó trên hình vẽ.

Tóm tắt lời giải bài toán

Do AH vuông góc với (P), d thuộc (P), nên AH vuông góc với d. Vậy AH thuộc mặt phẳng (Q) qua A và vuông góc với d. Gọi K là là giao điểm của

d và (Q). Trong mặt phẳng (Q), AH vuông góc với HK nên H thuộc đường tròn đường kính AK. Vậy quỹ tích của H là đường tròn đường kính AK trong mặt phẳng (Q) qua A vuông góc với d.

Tình huống tương tự

Ta có thể hướng dẫn HS hoặc cho HS tự nghiên cứu, tìm tòi lời giải những bài toán tương tự như sau:

Bài 1. Trong không gian cho một mặt phẳng (P) cố định và một điểm O cố định trong (P). Xét đường thẳng d trong mặt phẳng (P), quay xung quanh điểm O. Cho A là một điểm cố định ở ngoài mặt phẳng (P). Xác định vị trí của d sao cho khoảng cách từ A đến d có GTLN/ GTNN.

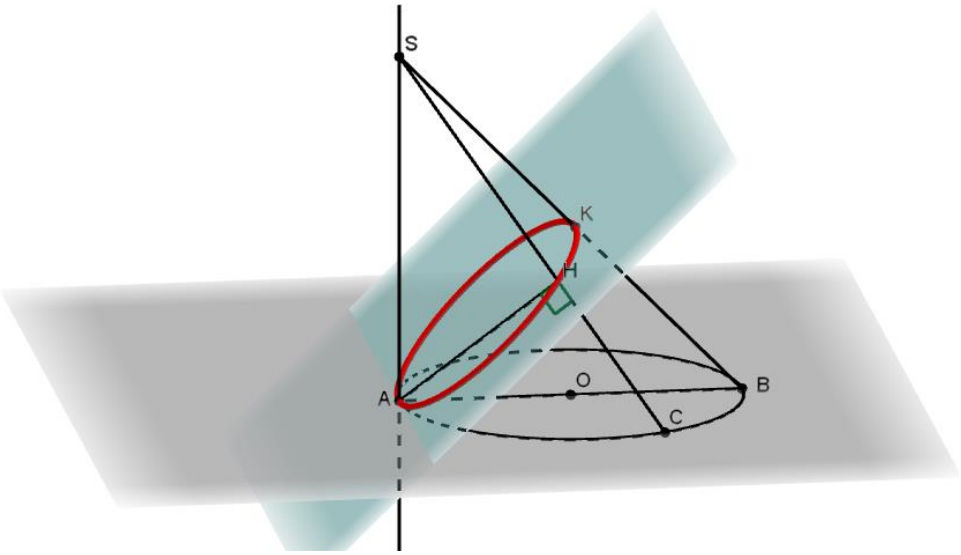
Bài 2. Trong không gian cho một đường thẳng d và một điểm A cố định, A không thuộc d. Xác định mặt phẳng (P) đi qua d sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất/ nhỏ nhất.

Tình huống 2.5. Trong không gian cho một mặt phẳng (P) cố định và một đường tròn đường kính AB cố định trong (P); cho SA là một đoạn thẳng cố định và vuông góc với (P). Xét điểm C di động trên đường tròn đường kính AB đã cho. Tìm quỹ tích hình chiếu H của A trên SC.

Các hoạt động trên lớp

GV: Hãy sử dụng phần mềm GeoGebra để vẽ hình cho bài toán. Không mất tổng quát ta có thể coi (P) là mặt phẳng Oxy, vẽ đường tròn đường kính AB với A trùng với gốc tọa độ O và B thuộc trục Oy. Lấy điểm S trên trục Oz. Lấy điểm C bất kì trên đường tròn đường kính AB đã cho. Xác định mặt phẳng qua A, vuông góc với SC, cắt SC tại H. Hãy quan sát vết của H khi C di động trên đường tròn đường kính AB đã cho.

HS: Thực hiện theo hướng dẫn của GV. Nhận xét: Quỹ tích của H là một đường tròn qua A.



Hình 22. Quỹ tích của H khi C di chuyển trên đường tròn

GV: Vậy mặt phẳng chứa đường tròn quỹ tích của H là mặt phẳng nào? Chú ý mặt phẳng đó phải cố định.

HS: Là mặt phẳng (Q) qua A và vuông góc với SB.

GV: Có thể kiểm nghiệm H thuộc mặt phẳng (Q) như thế nào?

HS: Ta lấy giao điểm của SC và (Q) xem có trùng với H hay không.

GV: Tốt lắm. Hãy chứng minh điều đó là đúng.

HS: AH vuông góc với SC và CB nên AH vuông góc mặt phẳng [SCB]. Suy ra AH vuông góc với SB. Vậy mặt phẳng [AHK] vuông góc với SB.

GV: Kết luận quỹ tích là gì?

HS: Qũy tích H là đường tròn đường kính AK trong mặt phẳng (Q) qua A và vuông góc với SB.

Tóm tắt lời giải bài toán

AH vuông góc với SC và CB nên AH vuông góc mặt phẳng [SCB]. Suy ra AH vuông góc với SB.

Dựng AH vuông góc với SB. Suy ra mặt phẳng [AHK] vuông góc với SB. Vậy H thuộc mặt phẳng (Q) qua A và vuông góc với SB.

Trong mặt phẳng (Q), AH vuông góc với HK nên H thuộc đường tròn đường kính AK trong mặt phẳng (Q).

2.2.3. Biện pháp 3. Sử dụng phần mềm hình học động hỗ trợ kiểm nghiệm các phán đoán và tìm kiếm trong dạy học giải toán Hình học không gian

2.2.3.1. Cơ sở và ý nghĩa của biện pháp

Phán đoán là một trong những hình thức cơ bản của tư duy. Theo từ điển tiếng Việt Hoàng Phê (2004): Phán đoán là dựa vào điều đã biết, đã thấy để suy xét rút ra nhận định về điều chưa biết, chưa xảy ra; Dự đoán là đoán trước tình hình, sự việc nào đó có thể xảy ra; Khám phá là tìm ra cái ẩn giấu, bí mật. Sự khám phá là hành động phát hiện thường được hiểu nghĩa là sau một quá trình tìm kiếm sẽ thấy được một đồ vật (hay sự vật) bị che giấu hay chưa được thấy. [29]

Theo Nguyễn Bá Kim (2015): GV cần hướng đến việc dạy Toán theo nhiều hoạt động, phải tạo ra được môi trường học tập tích cực nhằm kích thích HS tự tìm tòi, khám phá kiến thức để phát triển khả năng GQVĐ và tư duy toán học của mình. [18]

Thực tế đã chỉ ra rằng HS thật sự bị cuốn hút vào các giờ học toán nếu các em được làm việc trong một môi trường học tập đặt trọng tâm vào hoạt động khám phá toán học. Điều đó buộc các GV toán phải nỗ lực đổi mới việc DH toán của mình.

Theo Battista (2001): Trong bối cảnh hiện nay, HS cũng có thể dựa trên những chương trình máy tính để có những dự đoán hữu ích. [58]

Theo Bailey J. (2007): Tạo cơ hội cho HS xem xét, nghiên cứu trong quá trình DH là một cách tiếp cận DH hiệu quả vì nó có thể mang đến cho HS cơ hội khám phá kiến thức toán trong một môi trường học tập thú vị và mang

tính tương tác cao. [54]

Ta có thể tạo cơ hội cho HS khám phá Toán thông qua các bài toán kết thúc mở; qua đó HS được khuyến khích khám phá bằng các hoạt động trải nghiệm toán như quan sát, đặt câu hỏi và giả thuyết, đoán và thử, tìm kiếm quy luật... và được tự do theo đuổi các ý tưởng toán học phù hợp với mức độ nhận thức của mình.

Trong tác phẩm "Quy nạp và tương tự trong Toán học", Polya G. (1954) đã đề cập đến một hiện tượng vật lí là "ánh sáng luôn chọn đường đi ngắn nhất... liên quan tới tính chất phản xạ của gương phẳng" [93]. Mô hình toán học của hiện tượng này là một bài toán Hình học: Cho hai điểm và một đường thẳng, tất cả cùng thuộc một mặt phẳng, hai điểm cùng thuộc một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng đó. Tìm trên đường thẳng một điểm có tổng khoảng cách từ nó tới hai điểm đã cho nhỏ nhất.

Bài toán này đã được đưa vào trong sách giáo khoa môn Toán của một số nước, chẳng hạn trong sách giáo khoa ở Việt Nam. Bài toán này cũng được chuyển một cách tương tự thành bài toán trong Hình học không gian, bằng cách thay đối tượng "đường thẳng" trong bài toán thành "mặt phẳng" hoặc bỏ đi điều kiện "tất cả cùng thuộc một mặt phẳng" để được một bài toán trong không gian.

Cũng trong tài liệu [93], Polya còn đưa ra bài toán: Cho hai điểm và một đường thẳng, tất cả cùng thuộc một mặt phẳng, hai điểm cùng thuộc một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng đó. Trên đường thẳng đã cho, tìm một điểm sao cho nó nhìn hai điểm đã cho trước đó với một góc lớn nhất có thể.

Trong giải toán và nghiên cứu toán học, có một số hoạt động quan trọng, cần thiết cho mỗi người là dự đoán, phân tích, tìm tòi, khám phá…. Có không ít trường hợp, những hoạt động này chiếm khá nhiều thời gian và công sức của chúng ta. Ta có thể sử dụng một số chức năng đo đạc, tính toán, vẽ

hình của một số phần mềm hỗ trợ, để giảm bớt thời gian và công sức trong việc kiểm nghiệm tính đúng sai của những dự đoán, phân tích…. Chẳng hạn như phần mềm GeoGebra, Geometer's Sketchpad, Cabri 2D, 3D….

Thực tế cũng đặt ra một số vấn đề sau: (1) Chọn vị trí nào trên trái đất có tổng khoảng cách đến hai vị trí cố định ở ngoài trái đất có giá trị nhỏ nhất? (2) Chọn vị trí nào trên trái đất có góc nhìn đến hai vị trí cố định ở ngoài trái đất có giá trị lớn nhất? (3) Chọn một vị trí nào trên mặt đất để có thể chụp ảnh một bức tranh trong phòng triển lãm với góc nhìn lớn nhất v.v....

Mô hình toán học hóa những vấn đề nêu trên, ta có những bài toán sau:
(1) Tìm điểm trên mặt cầu có tổng khoảng cách đến hai điểm ở ngoài mặt cầu có giá trị nhỏ nhất?
(2) Chọn vị trí nào trên mặt cầu có góc nhìn đến hai điểm cố định ở ngoài mặt cầu có giá trị lớn nhất? v. v....

Đây là những bài toán HHKG thu hút sự chú ý của chúng tôi.

Chúng tôi đã lập phiếu điều tra (xem phụ lục 1) từ 137 sinh viên năm cuối hệ cử nhân của trường Đại học Sư phạm Hà Nội, K63, vào tháng 12 năm 2016 về việc giải hai bài toán (1) và (2) nêu trên. Kết quả là: Trong khoảng thời gian 120 phút, không có sinh viên nào làm được một trong hai bài toán này; thậm chí không có sinh viên nào đoán đúng điểm cần tìm trong hai bài toán này. Mặc dù trước đó chúng tôi đã có những gợi ý, dẫn dắt từ bài toán trong hình học phẳng chuyển sang bài toán của HHKG, thông qua các hoạt động trí tuệ như tương tự hóa, khái quát hóa. Với bài toán đơn giản đã có trong sách giáo khoa là: Trong mặt phẳng, cho hai điểm thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng *d*; tìm trên *d* một điểm có tổng khoảng cách từ nó tới hai điểm đó có giá trị nhỏ nhất, có tới gần 5% (17/137) số sinh viên được hỏi không làm được. Với câu tương tự: Trong mặt phẳng, cho hai điểm thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng *d*, tìm trên *d* một điểm

nhìn hai điểm đó dưới góc lớn nhất cũng không có sinh viên nào làm được, chỉ có 3 sinh viên đoán đúng được điểm cần tìm, chiếm khoảng 2% số sinh viên được hỏi (3/137).

Đến câu hỏi thay đường thẳng *d* bằng đường tròn: "Trong mặt phẳng, cho hai điểm A, B và đường tròn (*C*), tìm điểm M trên (*C*) sao cho MA + MB nhỏ nhất và tìm điểm trên (*C*) nhìn hai điểm đó dưới góc lớn nhất", không có sinh viên nào làm được. Dĩ nhiên, với câu hỏi thay đường tròn bằng mặt cầu: "Trong không gian, cho hai điểm A, B và mặt cầu (*T*), đoạn AB ở ngoài mặt cầu (*T*), tìm điểm C trên (*T*) sao cho góc ACB lớn nhất, sao cho CA + CB nhỏ nhất", như đã nói ở trên, không có sinh viên nào làm được; thậm chí không có sinh viên nào đoán đúng được điểm cần tìm. Riêng câu tương tự: Trong không gian, cho hai điểm A, B và mặt phẳng (P), đoạn AB không cắt (*P*), tìm điểm C trên (*P*) sao cho tổng CA + CB nhỏ nhất" có 75 sinh viên làm được, chiếm gần 55% số sinh viên được hỏi, còn 62 sinh viên không làm được (hơn 45%).

Điều tra (xem phụ lục 2) từ 270 HS lớp 12 THPT thuộc địa bàn tỉnh Nghệ An, tháng 12 năm 2016, kết quả cũng tương tự. Có duy nhất một em đoán đúng được điểm cần tìm ở bài toán "Trong mặt phẳng, cho đường tròn (C) và hai điểm A, B nằm ngoài (C), tìm điểm M trên (C) sao cho AM + MB nhỏ nhất". Có 13 em đoán đúng điểm cần tìm trong bài toán: "Trong mặt phẳng, cho đường thẳng d hoặc đường tròn (C) và đoạn AB không cắt chúng; tìm điểm M trên d hoặc đường tròn (C) sao cho góc AMB lớn nhất", chiếm gần 5% (13/ 270) và có 7 em đoán đúng điểm cần tìm trong bài toán này cho trường hợp đường thẳng d, chiếm gần 3% (7/ 270).

Kết quả điều tra chứng tỏ các dạng toán trên không phải là dạng toán quá xa lạ, nhưng không phải là dạng toán dễ. Sau đây chúng tôi sẽ trình bày

việc sử dụng một trong những phần mềm đo các đại lượng hình học hỗ trợ kiểm nghiệm tính đúng sai của những dự đoán và khám phá điểm cần tìm trong những bài toán nói trên.

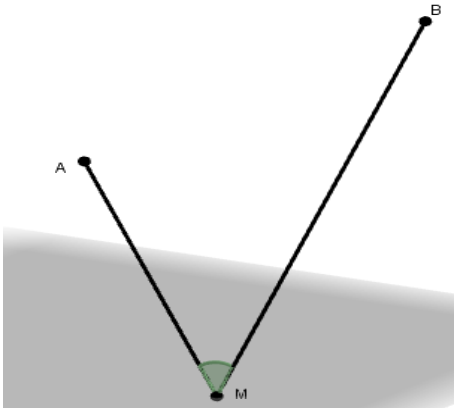
2.2.3.2. Thiết kế một số tình huống sử dụng biện pháp

Nhờ các chức năng đo độ dài của đoạn thẳng, đo độ lớn của góc, GeoGebra có thể hỗ trợ chúng ta kiểm nghiệm tính đúng sai của những dự đoán trong các bài toán tìm tòi một yếu tố nào đó trong giải toán Hình học không gian.

Tình huống 3.1. Trong không gian cho hai điểm A, B và mặt phẳng (P), đoạn AB không có điểm chung với (P). Tìm điểm M thuộc mặt mặt phẳng (P) sao cho góc AMB lớn nhất. (Hình 23)

Hoạt động trên lớp

Hoạt động 1 (Dự đoán điểm cần tìm):



Hình 23. Tìm vị trí M để góc AMB lớn nhất

Kết quả đã khảo sát ở trên, đây là bài toán không dễ dàng tìm được lời giải. Sau khoảng vài chục phút cho HS suy nghĩ tìm lời giải bài toán, giáo viên nên gợi ý cho HS dự đoán về điểm cần tìm. Ta có thể sử dụng phần mềm GeoGebra 5.0 để hỗ trợ cho việc dự đoán điểm cần tìm là điểm nào.

Mở phần mềm GeoGebra 5.0, chọn hiển thị 3D. Không mất tính tổng quát, ta có thể coi mặt phẳng đã cho là mặt phẳng (xOy), điểm A đã cho thuộc trục Oz. Để thuận lợi cho việc phát hiện tính chất của điểm cần tìm, ta có thể đặt các độ dài là số nguyên, chẳng hạn A(0; 0; 4), B(6; 0; 8). Lấy điểm M thuộc mặt mặt phẳng (xOy) và tính độ lớn góc AMB khi M di chuyển trên mặt phẳng (xOy). (Hình 24)

GV: Có nhận xét gì về sự thay đổi độ lớn của góc AMB khi điểm M càng xa hai điểm A và B?

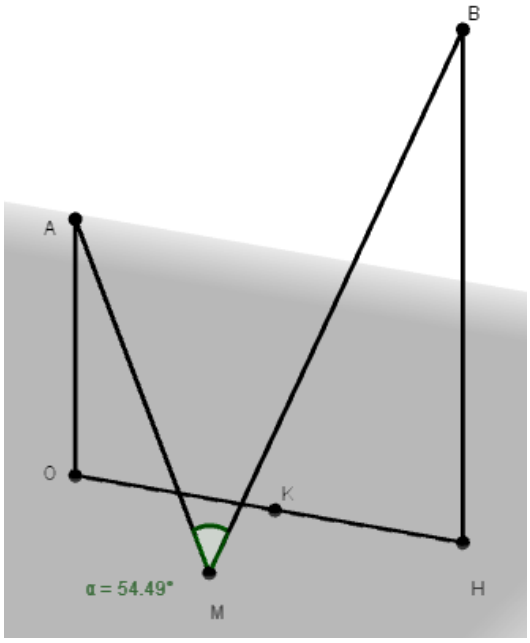
HS: Khi điểm M càng xa hai điểm A và B thì góc AMB càng nhỏ.

GV: Vậy nên tìm điểm M trong mặt phẳng (xOy) ở đâu để góc AMB là lớn nhất?

HS: Ta chỉ cần tìm kiếm điểm M trong mặt phẳng (xOy) gần gũi với hai điểm A và B.

GV: Hình chiếu của A trên mặt phẳng (xOy) là gốc tọa độ O và gọi hình chiếu của B trên mặt phẳng (xOy) là H. Hãy quan sát độ lớn của góc AMB khi cho điểm M dịch dần đến đoạn OH theo hướng vuông góc với OH (xem bảng 1).

HS: Khi cho điểm M dịch dần đến đoạn OH theo hướng vuông góc với OH thì góc AMB càng lớn dần.



Hình 24. Cho M dịch dần vào OH

Hiển thị Spreadsheet

	A	B	C	D
1	x(M)	y(M)	z(M)	α
2	3.09	-0.55	0	57.49°
3	3.09	-0.49	0	57.53°
4	3.09	-0.44	0	57.56°
5	3.09	-0.38	0	57.59°
6	3.09	-0.35	0	57.6°
7	3.09	-0.23	0	57.64°
8	3.09	-0.17	0	57.66°
9	3.09	-0.05	0	57.68°
10	3.09	0.01	0	57.68°
11	3.09	0.07	0	57.67°
12	3.09	0.12	0	57.67°
13	3.09	0.18	0	57.66°
14	3.09	0.24	0	57.64°
15	3.09	0.27	0	57.63°
16	3.09	0.3	0	57.62°
17	3.09	0.33	0	57.61°
18	3.09	0.42	0	57.57°
19	3.09	0.48	0	57.54°
20	3.09	0.51	0	57.52°

Bảng 1: *Khi y(M) dần tới 0, góc AMB nhỏ dần.*

Ta có thể dự đoán điểm cần tìm thuộc đoạn OH và trở lại vấn đề này ở trang 73 (*).

Hoạt động 2 (quy về bài toán trong mặt phẳng):

Đến đây bài toán của chúng ta quy về bài toán trong mặt phẳng:

Trong mặt phẳng cho hai điểm A, B và đường thẳng Δ, đoạn AB không có điểm chung với Δ. Tìm điểm M thuộc Δ sao cho góc AMB lớn nhất.

Có những dự đoán sau có thể xảy ra:

(1) M là giao điểm M_1 của Δ và đường trung trực của đoạn AB.

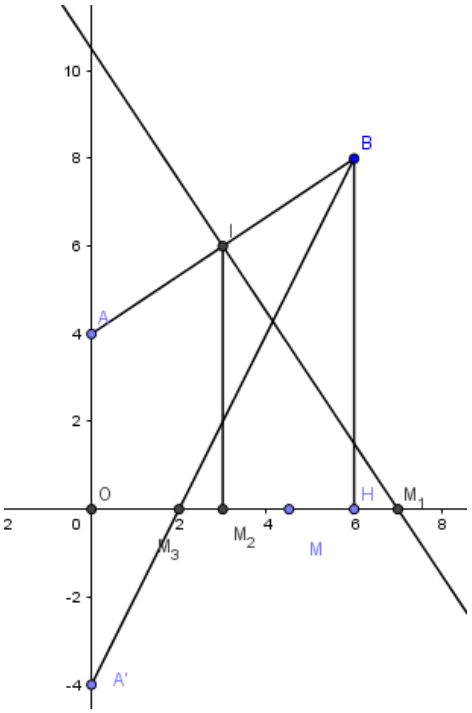
(2) M là hình chiếu M_2 của trung điểm đoạn AB trên Δ.

(3) Lấy A’ đối xứng với A qua Δ thì M là giao điểm M_3 của Δ và đoạn A’B.

(4) M là trung điểm M_4 của đoạn là hình chiếu của đoạn AB trên Δ. (M_4 trùng với M_2)

(5) M là điểm M_5 nhìn đoạn AB dưới góc vuông.

v.v.... (Hình 25)



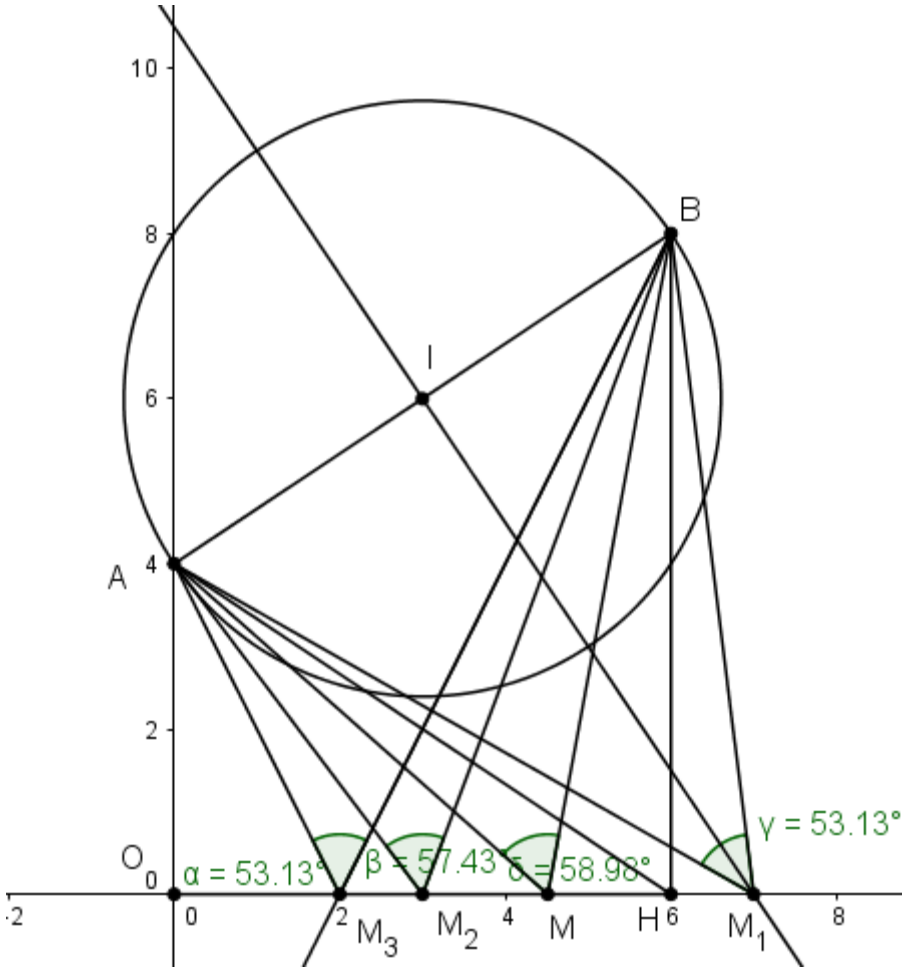
Hình 25. Một số dự đoán về điểm M

Hoạt động 3. Kiểm chứng tính đúng sai của những dự đoán

Ta sẽ kiểm chứng tính đúng sai của những dự đoán trên dựa vào phần mềm GeoGebra. Mở phần mềm GeoGebra 5.0 và chọn hiển thị 2D. Lấy điểm A (0; 4), B(6; 8), Δ là trục Ox. Tại các điểm từ M_1 đến M_5, số đo các góc AM_1B, AM_2B, AM_3B, AM_4B tương ứng bằng: $53{,}13^0$, $57{,}43^0$, 52, 13^0, $57{,}43^0$. (Hình 26). Điểm M_5 trong trường hợp này không xảy ra.

Cho điểm M di chuyển trên Δ ta thấy khi M ở vị trí khoảng giữa vị trí M_1 và M_2, khác với các điểm từ M_1 đến M_4 thì góc AMB bằng $58{,}98^0$, lớn hơn

những giá trị trên (Hình 27). Điều này chứng tỏ các dự đoán trên không đúng. Vậy M cần tìm là điểm nào?



Hình 26. Kiểm nghiệm các vị trí của M theo dự đoán

Hoạt động 4. Gợi suy nghĩ về lời giải dựa vào phần mềm hình học động

GV: Với ba điểm A, M, B gợi ra một chức năng vẽ hình quen thuộc nào?

HS: Có thể vẽ tam giác AMB hoặc đường tròn qua ba điểm A, M, B.

GV: Dùng phần mềm vẽ đường tròn qua ba điểm A, M, B và yêu cầu HS xem có những vị trí tương đối của đường tròn này và đường thẳng Δ?

HS: Vì hai đường tròn này đã có một điểm M chung nên có hai khả năng xảy ra: Đường tròn (AMB) cắt đường thẳng Δ tại hai điểm hoặc tiếp xúc với đường thẳng Δ.

GV: Có thể nghĩ đến điểm cần tìm – một điểm đặc biệt là điểm nào?

HS: Điểm đó có thể là tiếp điểm T của đường tròn (AMB) và đường thẳng Δ.

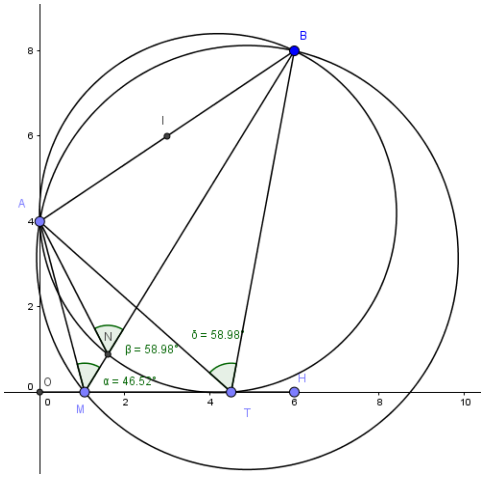
GV: Hãy chứng minh hoặc bác bỏ nhận định đó.

HS: Suy nghĩ và tìm cách chứng minh.

GV: Với mỗi điểm M thuộc Δ thì đoạn AM hoặc BM cắt cung tròn ATB tại điểm N. Ta có góc ANB bằng góc ATB (cùng chắn một cung), góc ATB bằng tổng hai góc AMB và MBN (góc ngoài tam giác), nên góc ATB lớn hơn góc AMB. Ta được điều phải chứng minh. (Hình 27)

Trở lại (*), ta luôn có: Hình chiếu của một góc trên một mặt phẳng luôn lớn hơn hoặc bằng góc đó, tức là góc AKB luôn lớn hơn hơn hoặc bằng góc AMB với K là hình chiếu của M trên mặt phẳng (OAB). Thật vậy:

Gọi P là hình chiếu của M trên đường thẳng AB, ta có KP vuông góc với AB (định lí ba đường vuông góc).



Hình 27. Tìm vị trí đặc biệt của đường tròn qua A, M, B

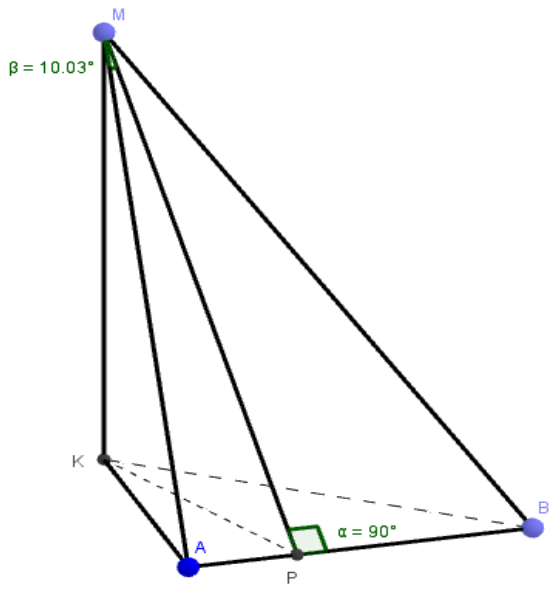
TH1. Nếu P thuộc đoạn AB. Gọi góc AMP là α, góc AKP là β, ta có:

$\sin\alpha = \dfrac{AP}{AM} \le \dfrac{AP}{AK} = \sin\beta$. Vậy α ≤ β (α và β là hai góc nhọn).

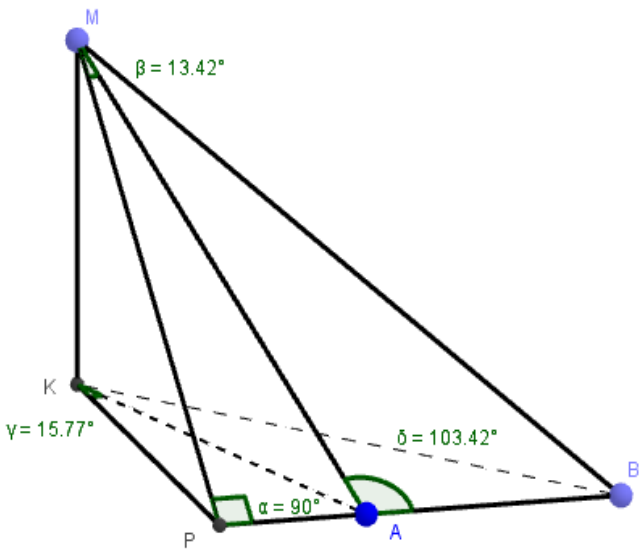
Vậy góc AMP không lớn hơn góc AKP. Tương tự góc BMP không lớn hơn góc BKP, dẫn đến góc AMB không lớn hơn góc AKP. (Hình 28)

TH2. Nếu P ở ngoài đoạn AB và B nằm giữa A, P (A nằm giữa B, P xét tương tự), ta có: Góc BMP không lớn hơn góc BKP, dẫn đến góc ABM không nhỏ hơn góc ABK, suy ra góc AMB không lớn hơn góc APB. (Hình 29)

Ta được điều phải chứng minh.



Hình 28. Góc AMB nhỏ hơn góc AKP khi P thuộc đoạn AB



Hình 29. Góc AMB nhỏ hơn góc AKP khi P ở ngoài đoạn AB

GV: Cách xác định điểm M trên đường thẳng Δ nhìn hai điểm A, B dưới góc lớn nhất?

HS: Quy về xác định tâm đường tròn qua hai điểm A, B và tiếp xúc với đường thẳng Δ.

GV: Tính chất của tâm đường tròn đó (gọi là I)?

HS: I vừa thuộc đường trung trực của đoạn AB, vừa cách đều điểm A và đường thẳng Δ.

GV: Tính chất của các điểm cách đều một điểm và một đường thẳng cho trước là gì?

HS: Tập hợp các điểm như thế là một parabol nhận đường thẳng cho trước đó là đường chuẩn và điểm cho trước đó là tiêu điểm.

GV: Cách vẽ parabol đó?

HS: Lấy một êke OCD (vuông ở O) và một đoạn dây không đàn hồi, có độ dài bằng OC. Đỉnh một đầu dây buộc vào điểm A, đầu kia buộc vào điểm D. Đặt êke sao cho cạnh CD nằm trên Δ. Lấy đầu bút chì ép sát sợi dây vào cạnh OC và giữ căng sợi dây trong khi cạnh DC trượt trên Δ. Khi đó đầu bút chì sẽ vạch nên một phần của parabol. (Theo SGK Hình học HH 10 nâng cao [38])

GV: Sau khi xác định được tâm I của đường tròn, xác định điểm M cần tìm như thế nào?

HS. Xác định tiếp điểm M của đường tròn tâm I, đi qua A và đường thẳng Δ; hoặc M là hình chiếu của I trên đường thẳng Δ.

GV: Đến đây bài toán đã được giải quyết xong. Hãy tìm một số tình huống thực tiễn phù hợp với bài toán trong tình huống này?

HS: Trong một phòng triển lãm có một bức tranh hình chữ nhật treo dựa vào tường. Hãy chọn một vị trí trên sàn nhà để chụp ảnh bức tranh sao cho góc nhìn bức tranh của máy ảnh đạt giá trị lớn nhất có thể.

Tóm tắt lời giải bài toán

Gọi O và H lần lượt là hình chiếu của A và B trên mặt phẳng (P), gọi K, P lần lượt là hình chiếu của M trên các đường thẳng OH, AB. Ta có KP vuông góc với AB (định lí ba đường vuông góc).

Trước hết ta chứng minh góc AMB không lớn hơn góc AKB.

Xét hai trường hợp: P ở trong/ ngoài đoạn AB.

TH1. Nếu P thuộc đoạn AB. Gọi góc AMP là α, góc AKP là β, ta có: $\sin\alpha = \frac{AP}{AM} \le \frac{AP}{AK} = \sin\beta$. Vậy α ≤ β (α và β là hai góc nhọn). (Hình 28)

Vậy góc AMP không lớn hơn góc AKP. Tương tự góc BMP không lớn hơn góc BKP, dẫn đến góc AMB không lớn hơn góc AKP.

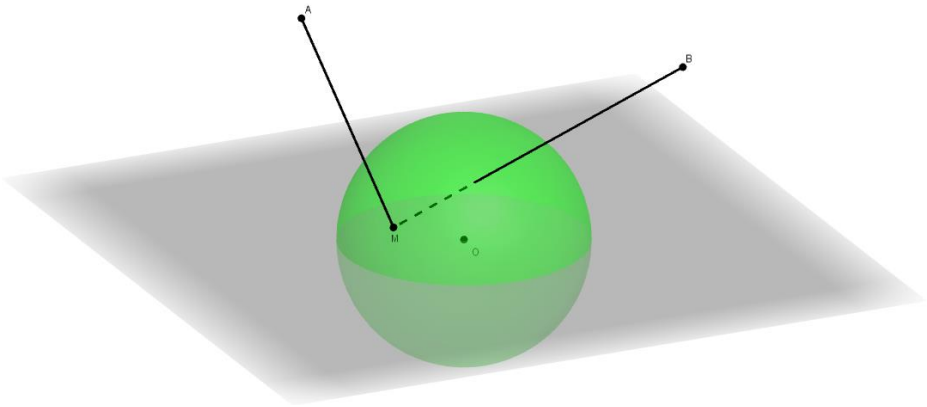
TH2. Nếu P ở ngoài đoạn AB và B nằm giữa A, P (A nằm giữa B, P xét tương tự), ta có: Góc BMP không lớn hơn góc BKP, dẫn đến góc ABM không nhỏ hơn góc ABK, suy ra góc AMB không lớn hơn góc APB. (Hình 29)

Từ kết quả trên, bài toán quy về bài toán: Trong mặt phẳng cho hai điểm A, B và đường thẳng Δ, đoạn AB không có điểm chung với Δ. Tìm điểm M thuộc Δ sao cho góc AMB lớn nhất.
Xét đường tròn (C) qua A, B và tiếp xúc với Δ, gọi tiếp điểm là T. Gọi N là giao điểm của một trong hai đoạn MA hoặc MB với đường tròn (C), ta được: Góc ANB bằng góc ATB (cùng chắn một cung), góc ATB bằng tổng hai góc AMB và MBN (góc ngoài tam giác), nên góc ATB lớn hơn góc AMB. Vậy T là điểm cần tìm. (Hình 27)

Tình huống 3.2. Trong không gian cho hai điểm A, B và mặt cầu (C) tâm O, bán kính R, đoạn AB ở ngoài mặt cầu (C). Tìm điểm M thuộc mặt cầu (C) sao cho góc AMB lớn nhất. (Hình 30)

Hoạt động trên lớp
Hoạt động 1 (Dự đoán điểm cần tìm):

Tương tự như tình huống 3.1, đây là bài toán không dễ dàng tìm được lời giải (như kết quả khảo sát đã trình bày ở trên). Sau khoảng vài chục phút cho HS suy nghĩ tìm lời giải bài toán, giáo viên nên gợi ý cho HS dự đoán về điểm cần tìm.



Hình 30. Tìm vị trí điểm M để góc AMB lớn nhất

Có thể có những dự đoán sau về điểm M cần tìm:

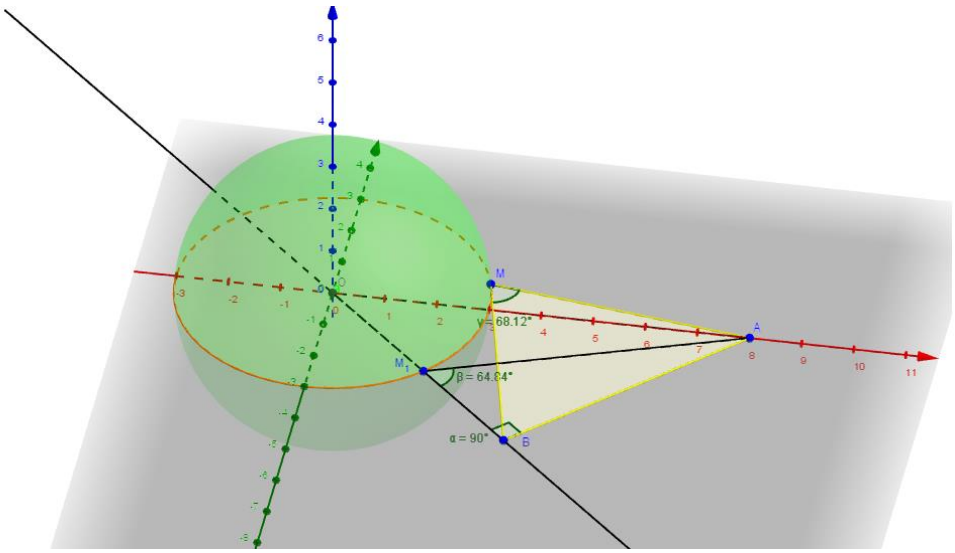
- Là điểm M_1 – giao điểm mặt cầu và đường thẳng qua tâm mặt cầu, vuông góc và cắt đường thẳng AB.
- Là điểm M_2 – giao điểm mặt cầu và đường trung trực của đoạn AB trong mặt phẳng qua AB và tâm mặt cầu.
- Là một trong hai điểm M_3, M_4 – giao điểm mặt cầu và OA, OB.
- Là điểm M_5 giữa cung nối M_3 và M_4 trên đường tròn lớn của mặt cầu qua M_3, M_4.
- Là điểm M_6 có tiếp tuyến tại đó của mặt cầu song song với AB và nằm trong mặt phẳng (OAB).
- Là điểm nhìn AB dưới góc vuông, trong mặt phẳng (OAB).....

Việc chứng minh những dự đoán trên là đúng sẽ không thể thực hiện được, bởi những dự đoán trên đều sai, song việc bác bỏ những dự đoán đó cũng tốn không ít thời gian và công sức. Chúng ta có thể sử dụng phần mềm Geogebra để bác bỏ các kết quả dự đoán đó một cách dễ dàng hơn. Chỉ cần chọn những trường hợp đặc biệt, ta sẽ có những phản ví dụ để bác bỏ những dự đoán không đúng.

Hoạt động 2: Kiểm chứng tính đúng, sai của những dự đoán.

Mở phần mềm GeoGebra và chọn hiển thị 3D.

Không mất tính tổng quát, ta có thể coi mặt cầu đã cho là mặt cầu có tâm là gốc tọa độ O, bán kính R, điểm A đã cho thuộc trục Ox, điểm B đã cho thuộc mặt phẳng xOy. Để thuận lợi cho việc phát hiện tính chất của điểm cần tìm, ta có thể đặt các độ dài là số nguyên, chẳng hạn R = 3, A(8; 0; 0), B(4; –1; 0). Nối các đoạn thẳng OA, OB lần lượt cắt mặt cầu (C) tại các điểm E, F. Lấy điểm M thuộc mặt cầu (C) và tính độ lớn góc AMB khi M di chuyển trên mặt cầu (C). (Hình 31)



Hình 31. Kiểm nghiệm các dự đoán

- Tại một điểm M ở gần trục Ox đo được $79,75^0$.
- Tại điểm M_1 số đo góc AM_1B xấp xỉ $64,84^0$, nhỏ hơn $79,75^0$. Loại điểm M_1.
- Tương tự, các góc AM_2B, AM_3B, AM_4B, AM_5B theo thứ tự đo được là $62,55^o$, $64,84^o$, $75,96^o$, $79,06^o$. Các góc này đều nhỏ hơn $79,75^0$. Loại các điểm M_2, M_3, M_4, M_5. Điểm M_6 trùng với điểm M_1.

(Xem giá trị các góc ở Bảng 2)

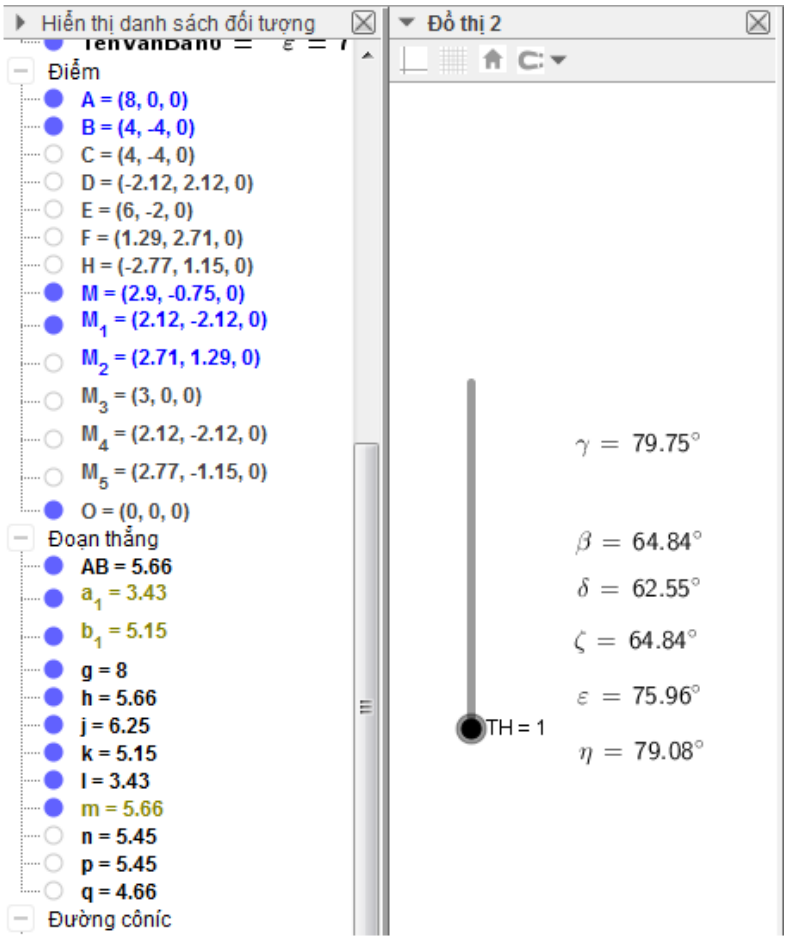
Vậy tất cả các điểm đã dự đoán ở trên đều không đúng.

Cũng có HS đoán rằng M là điểm nhìn AB dưới góc vuông. Phán đoán này còn nhiều vấn đề.

Thứ nhất: Liệu có tồn tại điểm đó không? (sẽ không tồn tại khi mặt cầu đã cho và mặt cầu đường kính AB không có điểm chung!).

Thứ hai: Nếu tồn tại, thì có bao nhiêu điểm và độ lớn các góc tại các điểm đó có khác nhau hay không? Chọn giá trị lớn nhất như thế nào?

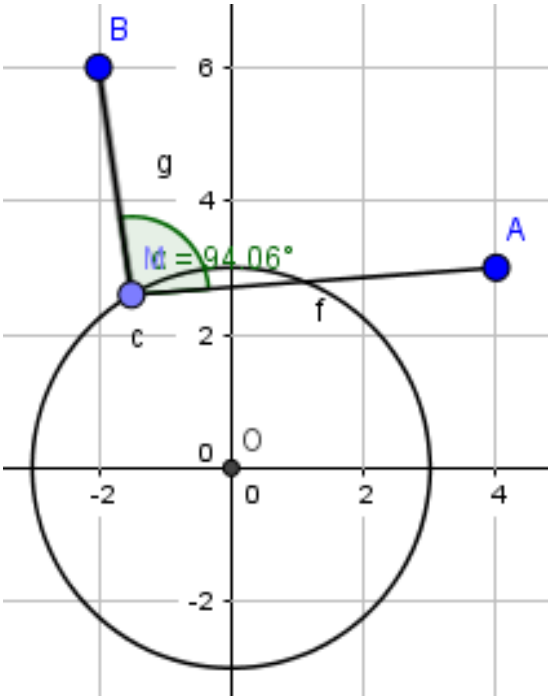
Vậy điểm cần tìm là điểm nào?



Bảng 2. Giá trị góc AMB thay đổi

Hoạt động 3 (Khám phá lời giải bài toán này với sự hỗ trợ của phần mềm GeoGebra):

GV: Các dự đoán ở trên đều tập trung vào các điểm thuộc giao tuyến của mặt cầu và mặt phẳng qua tâm mặt cầu và hai điểm đã cho, tức là mặt phẳng (OAB). Có thể kiểm nghiệm lại điều đó là đúng (*). (Ta sẽ trở lại ý này ở cuối bài).



Hình 32. Tìm điểm M thuộc đường tròn để góc AMB lớn nhất.

Hoạt động 4. Quy về bài toán trong mặt phẳng.

Đến đây bài toán của chúng ta quy về bài toán trong mặt phẳng:

Trong mặt phẳng cho hai điểm A, B và đường tròn (C), tâm O, đoạn AB ở ngoài đường tròn (C). Tìm điểm M thuộc (C) sao cho góc AMB lớn nhất. (Hình 32)

Tương tự như tình huống 2.1, với ba điểm A, M, B có thể nghĩ đến chức năng vẽ đường tròn qua ba điểm của phần mềm GeoGebra. Có ba vị trí tương đối của đường tròn này và đường tròn (C):

Đường tròn (AMB) cắt đường tròn (C) tại hai điểm hoặc tiếp xúc ngoài hoặc tiếp xúc trong với đường tròn (C), vì hai đường tròn này đã có một điểm M chung.

Từ đó có thể nghĩ đến điểm cần tìm – một điểm đặc biệt của đường tròn (C) là tiếp điểm T của đường tròn (AMB) và đường tròn (C) trong trường hợp chúng tiếp xúc ngoài với nhau.

Hoạt động 5. Gợi ý chứng minh dự đoán trên là đúng, tương tự đã chứng minh trong tình huống 2.1.

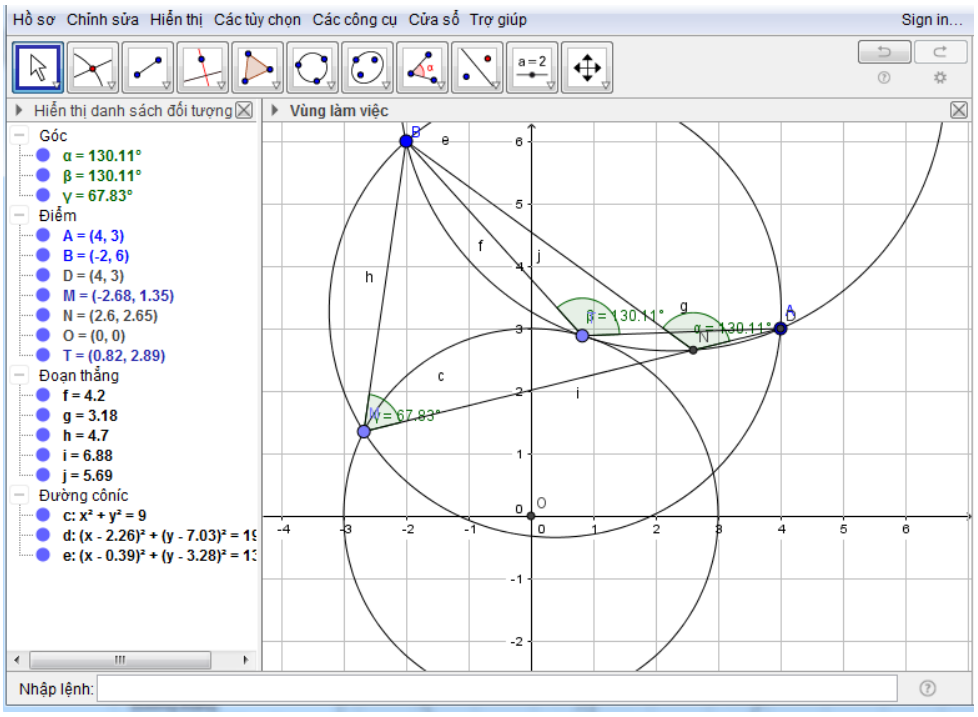
Do hai đường tròn tiếp xúc ngoài với nhau nên mỗi điểm của đường tròn này và mỗi điểm của đường tròn kia thuộc hai nửa mặt phẳng có bờ là tiếp tuyến chung của chúng.

Vậy với mỗi điểm M thuộc (C), đoạn MA hoặc MB sẽ cắt tiếp tuyến chung của hai đường tròn tại một điểm, gọi là điểm N.

Theo kết quả trong tình huống 2.1 góc ATB lớn hơn hoặc bằng góc ANB; mà góc ANB lớn hơn hoặc bằng góc AMB (tính chất góc ngoài tam giác).

Vậy góc ATB lớn hơn hoặc bằng góc AMB.

Ta được điều phải chứng minh. (Hình 33)



Hình 33. Góc AMB lớn nhất khi đường tròn (AMB) tiếp xúc với đường tròn (C)

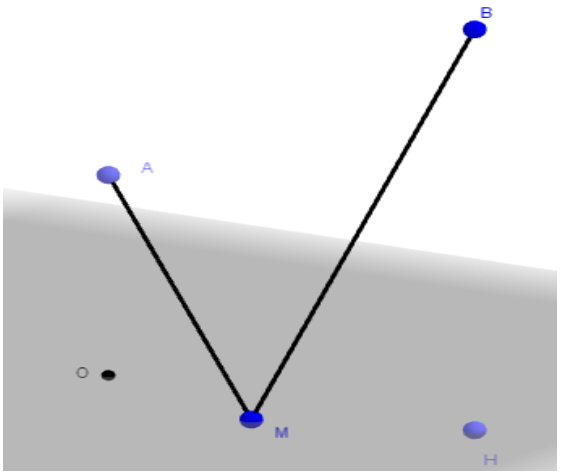
Tóm tắt lời giải bài toán

Gọi (C) là giao của mặt cầu đã cho và mặt phẳng [OAB]. Với mỗi điểm M thuộc mặt cầu đã cho, gọi N là hình chiếu của M trên mặt phẳng [OAB]. Chứng minh tương tự bài toán trong tình huống 4.1 (xét hai TH), ta có góc AMB không lớn hơn góc ANB.

Đến đây bài toán của chúng ta quy về bài toán trong mặt phẳng: Trong mặt phẳng cho hai điểm A, B và đường tròn (C), tâm O, đoạn AB ở ngoài đường tròn (C). Tìm điểm M thuộc hình tròn (C) sao cho góc AMB lớn nhất. (Hình 33)

Xét đường tròn (T) qua A, B và tiếp xúc ngoài với đường tròn (C). Gọi Δ là tiếp tuyến chung của chúng và T là tiếp điểm. Với mỗi điểm M thuộc hình tròn (C), gọi N là giao điểm của một trong hai đoạn MA hoặc MB với Δ, ta được: Góc ANB lớn hơn góc AMB (góc ngoài tam giác). Mà góc ATB lớn hơn góc ANB (theo kết quả tình huống 4.1). Vậy T là điểm cần tìm.

Tình huống 3.3. Trong không gian cho hai điểm A, B và mặt phẳng (P), đoạn AB không cắt mặt phẳng (P). Tìm điểm M thuộc (P) sao cho tổng MA + MB nhỏ nhất. (Hình 34)



Hình 34. Tìm điểm M thuộc mặt phẳng (p) để MA + MB nhỏ nhất

Hoạt động trên lớp

GV. Khoảng cách ngắn nhất từ A và từ B, đến mặt phẳng (P) là đoạn nào?

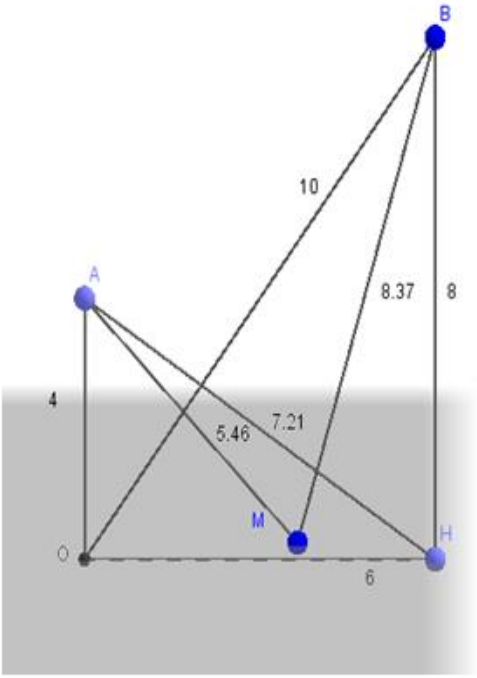
HS. Là đoạn vuông góc với (P) dựng từ A và B.

GV. Vậy điểm cần tìm là điểm chân đường vuông góc nào hay một điểm nào khác?

HS. Suy nghĩ, trả lời.

GV. Để nhanh chóng có câu trả lời, ta có thể dùng phần mềm đo đoạn thẳng để khẳng định hay bác bỏ những dự đoán. Sử dụng phần mềm GeoGebra 5.0, và hiển thị 3D. Không mất tổng quát, ta có thể coi mặt phẳng (P) đã cho là mặt phẳng (xOy), điểm A thuộc trục Oz có hình chiếu xuống mặt phẳng xOy trùng với gốc tọa độ O, điểm B có hình chiếu xuống mặt phẳng xOy là điểm H. Đo các đoạn OA, OB, HA, HB và tính các tổng OA + OB, HA + HB.

Tiếp đó lấy điểm M bất kì trên (P). Lập bảng giá trị tổng T_M = MA + MB và ba thành phần tọa độ của điểm M tương ứng để tìm ra giá trị T_M nhỏ nhất và tính chất của điểm M cần tìm. (Hình 35 và Bảng 3)



Hình 35. M càng gần OH thì AM + MB càng nhỏ

	A	B	C	D
1	x(M)	y(M)	z(M)	T_M
2	3.62	-1.07	0	13.91
3	3.62	-0.99	0	13.89
4	3.62	-0.92	0	13.87
5	3.62	-0.84	0	13.85
6	3.62	-0.77	0	13.83
7	3.62	-0.69	0	13.81
8	3.62	-0.62	0	13.8
9	3.62	-0.54	0	13.79
10	3.62	-0.47	0	13.77
11	3.62	-0.39	0	13.76
12	3.62	-0.32	0	13.76
13	3.62	-0.24	0	13.75
14	3.62	-0.16	0	13.75
15	3.62	-0.09	0	13.74
16	3.62	-0.01	0	13.74
17	3.64	-0.01	0	13.75
18	3.64	0.06	0	13.75
19	3.64	0.14	0	13.75
20	3.64	0.21	0	13.76
21	3.64	0.29	0	13.76
22	3.64	0.36	0	13.77

Bảng 3. Giá trị của T_M = MA + MB

Từ kết quả trên bảng 3 ta thấy khi y(M) gần bằng 0, tức điểm M gần đoạn OH thì T_M nhỏ hơn các giá trị khác (phần đóng khung trong bảng 3).

Tiếp tục cho điểm M di chuyển trên đoạn OH, ta tìm ra vị trí điểm M có T_M nhỏ nhất khi đoạn OM dao động từ 1,8 đến 2,1. (Hình 36 và Bảng 4)

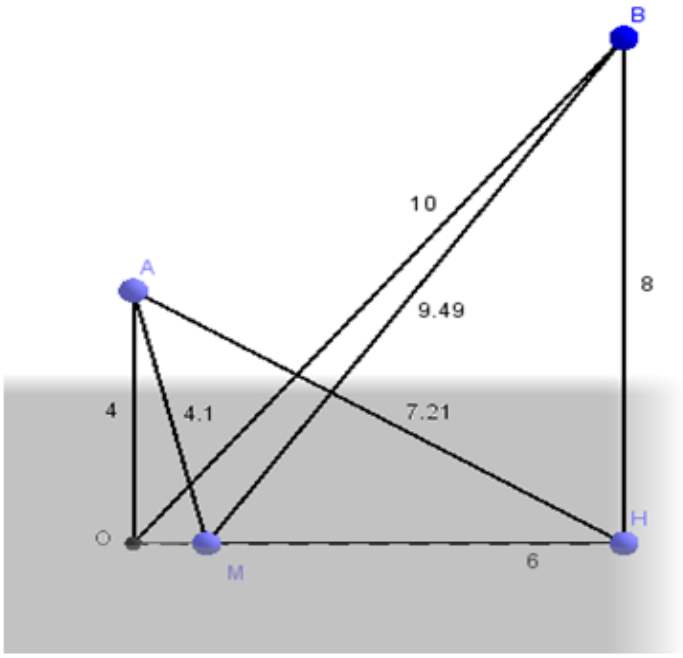
Tạm chấp nhận OM = 2, ta được OM = 2, MH = 4, vậy điểm M có đặc điểm gì?

HS: Khi đó:

. OA = 2OM, HB = 2HM,

. ΔAOM đồng dạng với ΔBHM, các góc AMO và BMH bằng nhau.

Tóm tắt lời giải bài toán



Hình 36. Tìm M trên OH để T_M = MA + MB nhỏ nhất

	A	B	C	D
1	x(M)	y(M)	z(M)	T_M
2	0	0	0	14
3	0.3	0	0	13.83
4	0.6	0	0	13.7
5	0.9	0	0	13.59
6	1.2	0	0	13.51
7	1.5	0	0	13.45
8	1.8	0	0	13.42
9	2.1	0	0	13.42
10	2.4	0	0	13.44
11	2.7	0	0	13.48
12	3	0	0	13.54
13	3.3	0	0	13.63
14	3.6	0	0	13.73
15	3.9	0	0	13.86
16	4.2	0	0	14
17	4.5	0	0	14.16
18	4.8	0	0	14.34
19	5.1	0	0	14.53
20	5.4	0	0	14.74
21	5.7	0	0	14.97
22	0	0	0	14

Bảng 4. các giá trị T_M

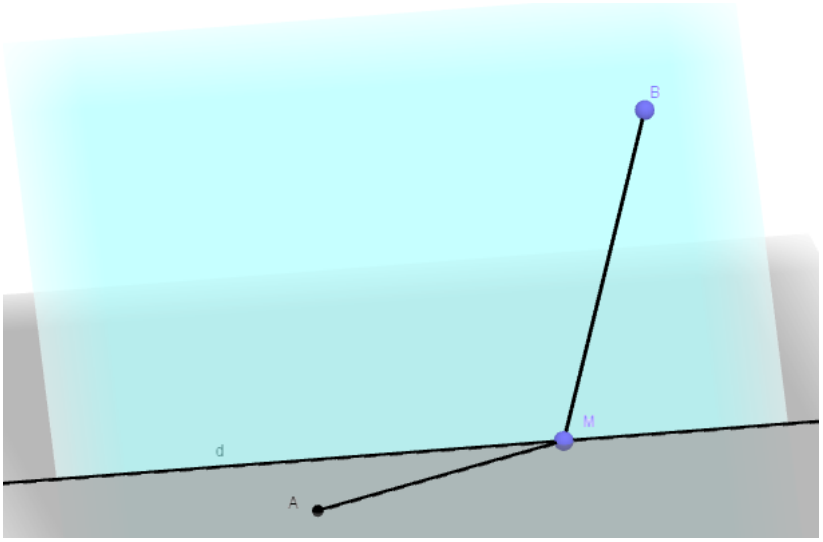
Gọi *O* và *H* lần lượt là hình chiếu của *A* và *B* trên mặt phẳng (*P*), gọi *K* là hình chiếu của *M* trên các đường thẳng *OH*. Ta có $MA \geq KA$, $MB \geq KB$ (đường xiên và hình chiếu). Vậy $MA + MB \geq KA + KB$.

Lấy *B'* đối xứng với *B* qua đường thẳng *OH*, ta có $KB = KB'$.
Nên $KA + KB = KA + KB' \geq AB'$ không đổi. Đẳng thức xảy ra khi *K* là giao điểm *I* của *AB'* với *OH*. Giao điểm *I* đó chính là điểm cần tìm.

GV có thể gợi cho HS giải bài toán tương tự: Trong không gian cho hai điểm A, B và mặt cầu (C), Tìm điểm M thuộc (C) sao cho tổng *MA* + *MB* nhỏ

nhất; hoặc giải bài toán bằng cách khác: Đặt đoạn $OM = x$ và tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T_M = MA + MB$ theo x và các đoạn không đổi: $a = OA$, $b = HB$, $c = OH$.

Tình huống 3.4. Trong không gian, cho hai điểm và một đường thẳng, đường thẳng nối hai điểm đó và đường thẳng đã cho chéo nhau. Tìm một điểm trên đường thẳng đã cho sao cho tổng khoảng cách từ nó tới hai điểm đã cho có giá trị nhỏ nhất. (Hình 37)



Hình 37. Tìm M thuộc d để $T_M = MA + MB$ nhỏ nhất

Các hoạt động trên lớp

GV: Em đã gặp bài toán nào tương tự bài toán này hay không?

HS: Có một bài toán tương tự bài toán này, ở trong mặt phẳng.

GV: Em có thể nói rõ hơn về bài toán đó hay không?

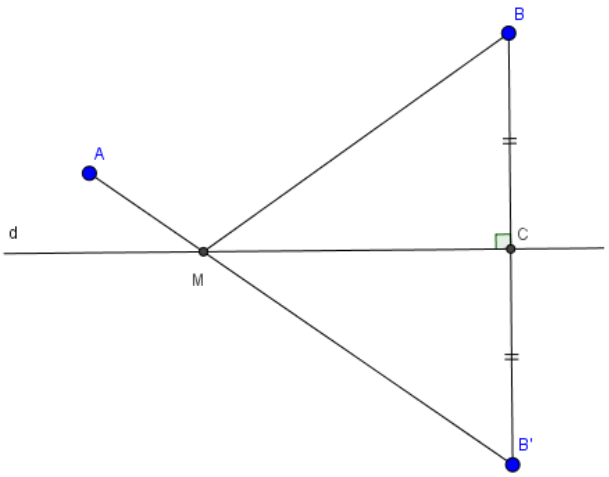
HS: Cho hai điểm và một đường thẳng, tất cả cùng thuộc một mặt phẳng và hai điểm này không thuộc đường thẳng đã cho. Tìm một điểm sao trên đường thẳng đã cho sao cho tổng khoảng cách từ nó tới hai điểm đã cho có giá trị nhỏ nhất.

GV: Các em đã biết lời giải bài toán này hay chưa?

HS: Gọi hai điểm đã cho là A và B, gọi đường thẳng đã cho là Δ, gọi điểm cần tìm là C. Xét hai trường hợp (TH):

TH 1. A và B thuộc hai nửa mặt phẳng bờ Δ: Với mọi điểm C thuộc Δ, ta luôn có AC + CB ≥ AB. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi A, C, B thẳng hàng. Vậy AC + CB có giá trị nhỏ nhất bằng đoạn AB, khi C là giao điểm của đoạn AB và đường thẳng Δ.

TH 2. A và B thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ Δ: Quy về TH 1 bằng cách lấy B' đối xứng với B qua Δ. Khi đó với mọi điểm M thuộc Δ, ta luôn có BM = B'M và AM + MB = AM + MB' ≥ AB'. Suy ra AM + MB có giá trị nhỏ nhất bằng đoạn AB', khi M là giao điểm của đoạn AB' và đường thẳng Δ. (Hình 38)



Hình 38. Quy về bài toán quen thuộc

GV: Ta có thể quy bài toán đã cho về bài toán đã biết này như thế nào?

HS: Suy nghĩ về câu hỏi của GV

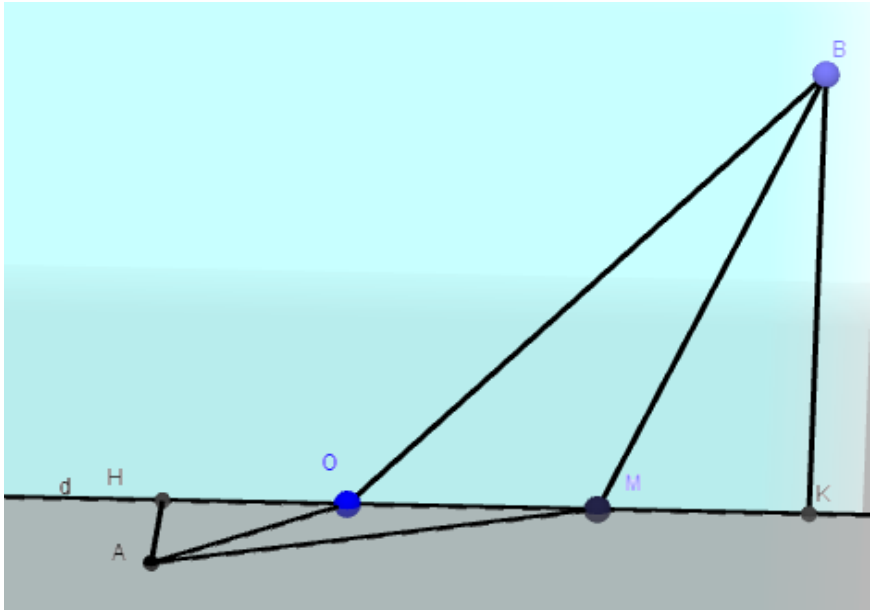
GV: Ta có thể trải nửa mặt phẳng (Q) chứa B bằng cách quay nửa mặt phẳng chứa B và Δ xung quanh Δ áp vào mặt phẳng (P) chứa A và Δ, sao cho điểm B đến vị trí B' mà A và B' không cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ Δ.

Theo bài toán trên, điểm C cần tìm là giao điểm của đoạn AB' và đường thẳng Δ.

Ta cũng có thể sử dụng phần mềm Geogebra để hỗ trợ tìm tòi, khám phá xem điểm cần tìm là điểm nào? Cụ thể như sau:

Không mất tính tổng quát, ta có thể lấy điểm A trên mặt phẳng xOy, trục Oy là đường thẳng d – giao tuyến của hai mặt phẳng lần lượt chứa A và B. Để thuận lợi cho việc phát hiện tính chất của điểm cần tìm, ta cần lấy các độ dài là số nguyên, chẳng hạn A(– 2; 2; 0), B(5; – 3; 4). (Hình 39).

Khi di chuyển điểm M trên đường thẳng d, ta có kết quả ở bảng 5:



Hình 39. M di chuyển trên d

HS. Thực hiện yêu cầu của GV.

GV: Hãy chú ý phát hiện điểm trên d cho ta tổng MA + MB nhỏ nhất (phần đóng khung trong bảng 4) và phát hiện điểm cần tìm.

HS: Gốc tọa độ O tương ứng với tổng lớn nhất.

Hiển thị Spreadsheet

	A	B	C	D
1	x(M)	y(M)	T_M	T_O
2	0	-0.66	9.96	
3	0	-0.64	9.96	
4	0	-0.62	9.95	
5	0	-0.6	9.95	
6	0	-0.56	9.94	
7	0	-0.54	9.94	
8	0	-0.52	9.94	
9	0	-0.48	9.93	
10	0	-0.42	9.92	
11	0	-0.32	9.91	
12	0	-0.2	9.9	
13	0	-0.12	9.9	
14	0	-0.06	9.9	
15	0	-0.02	9.9	
16	0	0	9.9	
17	0	0.06	9.9	
18	0	0.14	9.9	
19	0	0.22	9.91	
20	0	0.3	9.91	
21	0	0.38	9.92	

Bảng 5: *Các giá trị của tổng MA + MB khi M di chuyển trên d*

GV: Hãy phát hiện tính chất của điểm này so với hai điểm A, B và đường thẳng d. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A, B trên Δ, hãy đo các khoảng cách từ A, B đến Δ và điểm C tìm được chia đoạn HK theo tỉ số nào, hãy phát hiện tỉ số này có liên quan gì đến các khoảng cách từ A, B đến Δ hay không?

HS. $\frac{CA}{CB} = \frac{AH}{BK}$.

GV. Hãy phát biểu bằng lời kết quả tìm được.

HS. Điểm C cần tìm là điểm chia đoạn HK theo tỉ số bằng tỉ số khoảng cách từ A đến Δ và từ B đến Δ.

GV. Kết quả theo hai cách có giống nhau hay không?

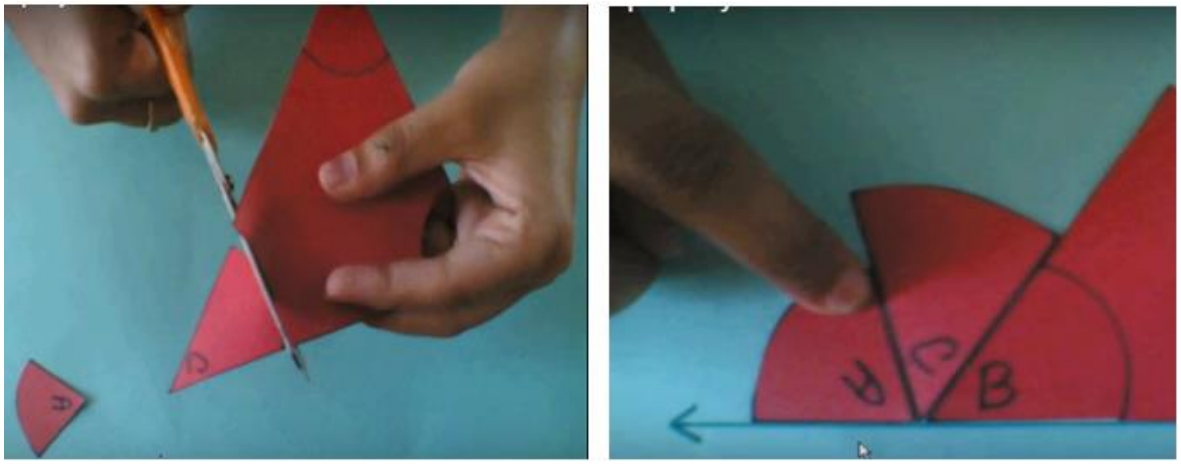
HS. Cả hai kết quả đều dẫn đến góc ACH bằng góc BCK, nói cách khác AC và BC cùng tạo với Δ góc như nhau.

GV: Qua những ví dụ trên, chúng ta thấy rõ hơn ý nghĩa và vai trò của CNTT trong việc kiểm nghiệm tính đúng sai của những dự đoán, giảm bớt được thời gian tìm kiếm cho lời giải bài toán.

2.2.4. Biện pháp 4. Sử dụng phần mềm hình học động hỗ trợ dạy học giải bài toán Hình học không gian bằng thủ pháp "trải hình"

2.2.4.1. Cơ sở và ý nghĩa của biện pháp

Ở trường THCS HS đã được biết đến thủ pháp "Cắt và ghép hình" khi chứng minh tổng ba góc của bất kì tam giác nào cũng bằng 180^0. Đây là một thủ pháp đặc trưng trong giải toán Hình học phẳng. Giáo viên có thể hướng dẫn HS vẽ một tam giác bất kì trên giấy rồi xé riêng các góc của tam giác và ghép lại sẽ được một góc bẹt. (Hình 40)



Hình 40. Thủ pháp cắt ghép hình

Hoặc giáo viên có thể dùng phần mềm vẽ một tam giác *ABC* bất kì với *M, N, P* lần lượt là trung điểm *AB, BC, CA*; rồi lấy *M* làm tâm, quay tam giác *MNB* góc 180^0 thành tam giác MN_1A sao cho đoạn NN_1 nhận *M* là trung điểm; lấy *P* làm tâm quay tam giác *PNC* góc 180^0 thành tam giác PN_2A sao cho đoạn NN_2 nhận *P* là trung điểm. Theo cách đó, ba góc của tam giác *ABC* bằng ba góc N_1AB, *BAC*, CAN_2 có tổng bằng 180^0.

Thủ pháp "Cắt và ghép hình" phù hợp với kiểu "học qua hành", "học qua làm" (learning by doing), vừa có tính trực quan vừa hấp dẫn HS. Tương tự thủ pháp này, khi giải toán Hình học không gian, ta có thủ pháp "Trải hình" – trải các mặt của một hình không gian lên một mặt phẳng.

Thủ pháp là một khái niệm thuộc lĩnh vực phương pháp, đó chính là cách thức mà người ta xử lí và sử dụng hiệu quả các thông tin theo lối suy nghĩ riêng biệt, linh hoạt, khéo léo, độc đáo.

Thủ pháp là một trong những thành tố của trí thông minh; thủ pháp được vận dụng khi người ta cần giải quyết một nhiệm vụ nào đó. Việc chứng minh bài toán hình học không gian bằng "Trải hình" có thể xem là một thủ pháp. [78]

"Trải hình" (Opening and Net) là trải các mặt của một hình không gian lên một mặt phẳng. Thủ pháp này giúp cho việc giải không ít những bài toán hình học không gian vừa độc đáo, vừa dễ hiểu.

Khi trải một hình lên một mặt phẳng ta được một hình khai triển - một hình hai chiều có thể được xếp lại để tạo thành một hình dạng ba chiều hoặc một khối hình.

Một hình khai triển là một mô hình được thực hiện khi bề mặt của một hình dạng ba chiều được trải ra bằng phẳng cho thấy mỗi mặt của nó. Một khối hình có thể có những hình khai triển khác nhau.

Để tìm hiểu thực trạng HS THPT đã biết về thủ pháp trải hình trong giải toán Hình học không gian (HHKG) ở mức độ nào, chúng tôi đã quan sát 120 HS thuộc ba lớp 11 Trường THPT An Lão - Hải phòng, tháng 4 năm 2016 giải một bài toán trong khoảng thời gian 30 phút.

Đề bài toán: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.\ EFGH$ có $AD = a$, $AB = b$, $AE = c$, với $a \leq b \leq c$. Xác định mặt phẳng qua AG sao cho thiết diện của hình hộp chữ nhật cắt bởi mặt phẳng đó có chu vi nhỏ nhất.

Ý tưởng giải bài toán:

Thứ nhất: Đây là bài toán đòi hỏi phải xét nhiều trường hợp (TH) và HS (HS) phải so sánh kết quả của các TH đó để tìm ra thiết diện có chu vi nhỏ nhất.

Thứ hai: Có thể đánh giá chu vi thiết diện thông qua biểu thức tính toán nhờ các độ dài đoạn thẳng, nhưng tốt hơn là dùng thủ pháp trải hình.

Kết quả khảo sát như sau:

Trong 10 phút đầu, có 98/120 (khoảng 81%) số HS xác định được thiết diện trong một TH.

Trong 10 phút tiếp theo, có 48/120 (40%) số HS biết tính chu vi thiết diện theo kích thước đã cho và ẩn phụ.

Sau 30 phút làm bài, có 15/120 số HS (12,5%) đánh giá được giá trị nhỏ nhất của chu vi thiết diện trong TH đã xác định.

Trong số đó có 9 HS (7,5%) biết trải hình, 6 HS (5%) đánh giá giá trị nhỏ nhất của chu vi thiết diện nhờ bất đẳng thức; có 12 HS (10%) biết xét thiết diện trong nhiều TH khác nhau.

Kết quả khảo sát cho thấy: Đây là một bài toán không đơn giản và có rất ít HS biết trải hình để giải bài toán.

2.2.4.2. Thiết kế một số tình huống áp dụng biện pháp

Tình huống 4.1. Cho hình hộp chữ nhật *ABCD. EFGH* có $AD = a$, $AB = b$, $AE = c$, với $a \leq b \leq c$. Xác định mặt phẳng (*P*) qua *AG* sao cho thiết diện của hình hộp chữ nhật cắt bởi mặt phẳng đó có chu vi nhỏ nhất. (Hình 41)

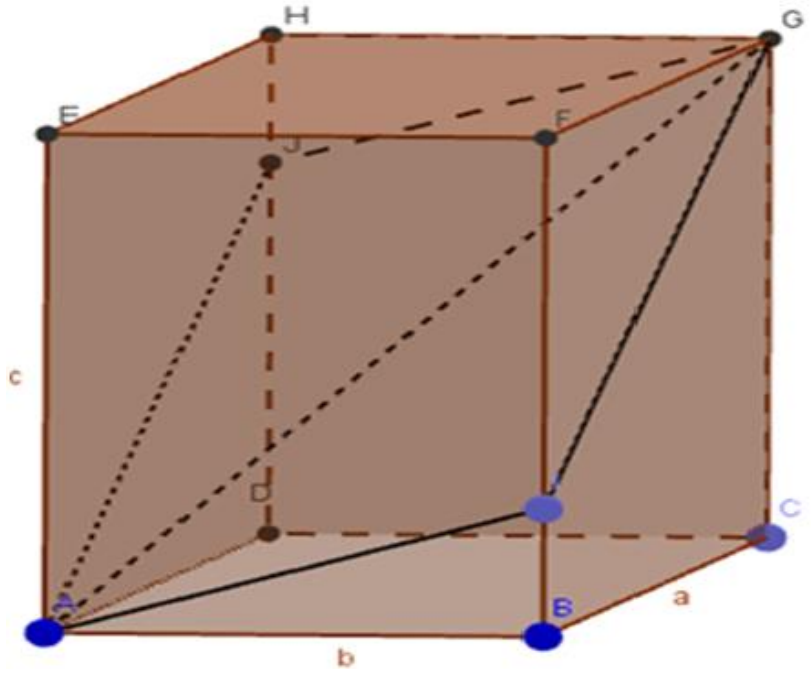
Các hoạt động trên lớp:

Hoạt động 1. Tìm một cách giải bài toán.

GV: Giao bài toán cho cả lớp làm bài trong 15 phút.

HS: Vẽ hình, suy nghĩ, giải toán.

GV: Xét TH *(P)* cắt cạnh *BF* tại điểm *I*, ta gọi đây là TH 1, thiết diện là hình gì, vì sao?



Hình 41. Thiết diện là hình bình hành *AIGJ*

HS: Thiết diện là hình bình hành *AIGJ*, theo tính chất: Hai mặt phẳng song song cắt mặt phẳng thứ ba theo hai giao tuyến song song với nhau.

GV: Khi nào chu vi thiết diện nhỏ nhất?

HS: Hoạt động nhóm, độc lập.

Nếu HS đặt $BI = x$, chu vi thiết diện tính được theo công thức:

$C = 2v$, với $v = AI + IG = \sqrt{b^2 + x^2} + \sqrt{a^2 + (c - x)^2}$.

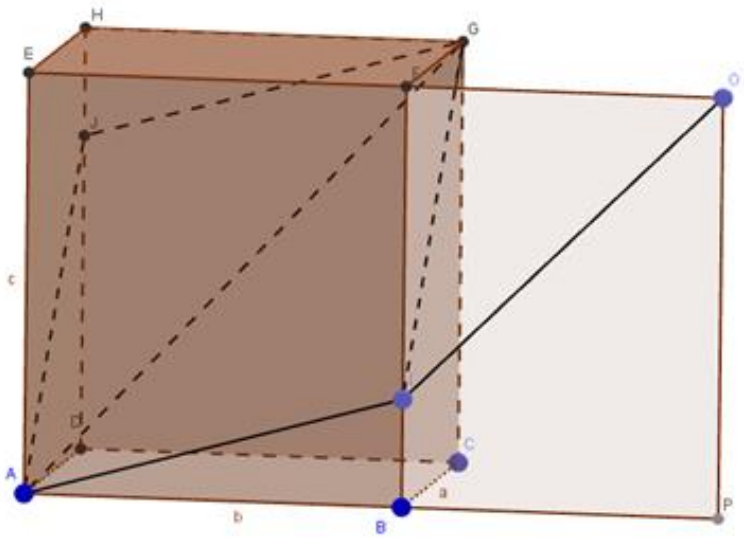
Đến đây chỉ có một số ít HS có thể tìm được giá trị nhỏ nhất của biểu thức này (như kết quả khảo sát chúng tôi đã trình bày trong mục 2.1.1.1).

Hoạt động 2. Sử dụng thủ pháp trải hình

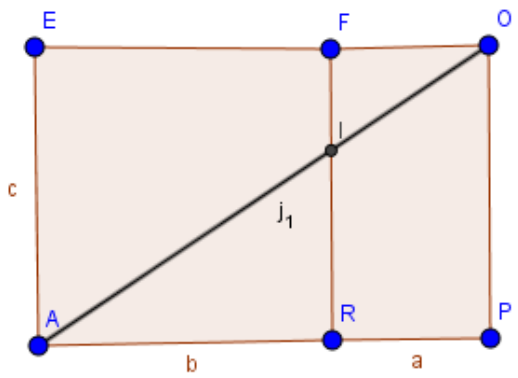
GV: Hãy trải mặt *BCGF* lên mặt phẳng (*ABFE*) sao cho hình vuông *BCGF và ABFE* xếp liền kề nhau (Hình 42) – gọi là thủ pháp "Trải hình".

Khi đó nửa chu vi thiết diện là tổng hai đoạn AI và IC. Vị trí nào của điểm *I* thì tổng này nhỏ nhất?

HS: Chu vi thiết diện nhỏ nhất khi *I* là giao điểm của *AO* và *BF*.



Hình 42. Trải mặt này lên mặt kia



Hình 43. AI + IG nhỏ nhất khi ba điểm A, I, O thẳng hàng

GV: Khi đó điểm *I* chia đoạn *BF* theo tỉ số nào?

HS: Điểm *I* chia đoạn *BF* theo tỉ số *IF/ IB* = *a / b*. (Hình 43)

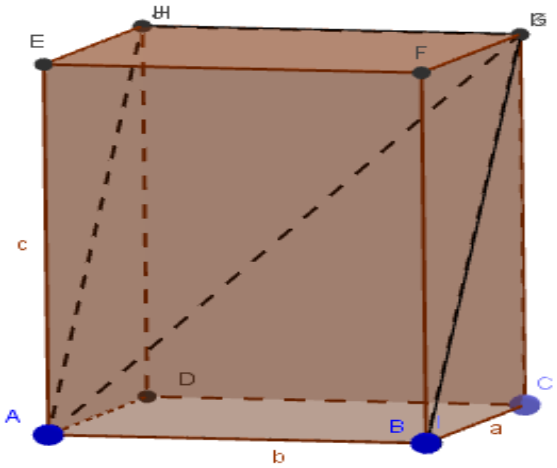
GV: Khi đó giá trị nhỏ nhất của chu vi thiết diện bằng bao nhiêu?

HS: Khi đó $2v = 2\sqrt{(a+b)^2 + c^2} = 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab}$.

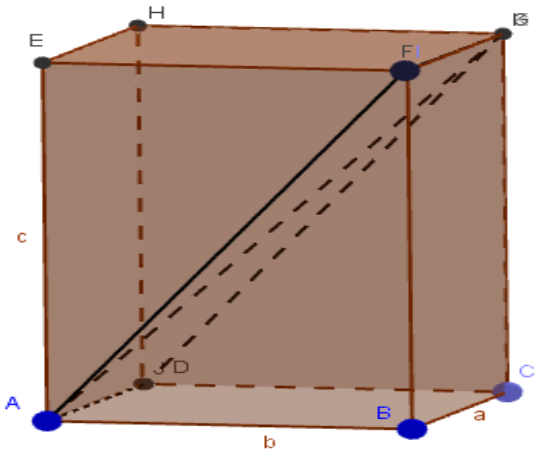
GV: TH đặc biệt: điểm *I* trùng với *B* hoặc *I* trùng với *F* thì kết quả thế nào?

HS: Khi điểm *I* trùng với *B*, thiết diện là hình chữ nhật *ABGH*, có $v = b + \sqrt{a^2 + c^2}$. (Hình 44)

Khi *I* trùng với *F*, thiết diện là hình chữ nhật *AFGD*, có $v = a+\sqrt{b^2+c^2}$. (Hình 45)



Hình 44. Thiết diện là *ABGH*



Hình 45. Thiết diện là *AFGD*

GV: So sánh TH điểm *I* ở trong đoạn *BF* và hai TH đặc biệt trên, TH nào thiết diện có chu vi nhỏ nhất?

HS: Ta có $a+\sqrt{b^2+c^2} \le b+\sqrt{a^2+c^2} \le \sqrt{(a+b)^2+c^2}$.

Vậy, TH điểm *I* ở trong đoạn *BF* thì thiết diện có chu vi nhỏ nhất.

GV: Trong TH này, điểm *I* chia đoạn *BF* theo tỉ số nào?

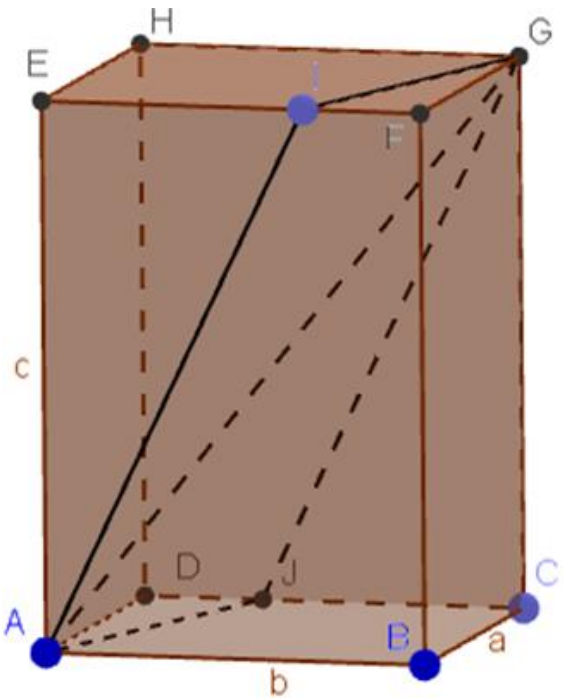
HS: Trong TH này, điểm *I* chia đoạn *BF* theo tỉ số *IF/ IB = a/b*.

GV: Còn TH nào khác của thiết diện hay không?

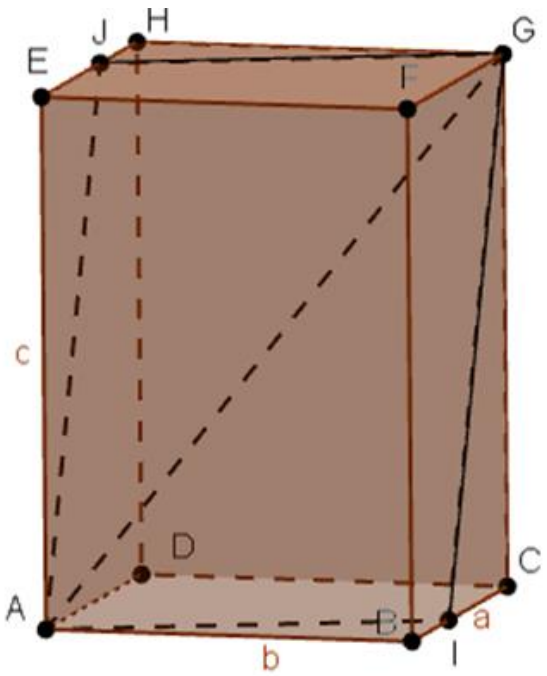
HS: Còn có các TH sau xảy ra:

TH2: Mặt phẳng *(P)* cắt BC tại điểm *M* và *(P)* cắt đoạn *EH* tại điểm *N*, thiết diện là hình bình hành *AMGN*. Làm tương tự TH1, giá trị nhỏ nhất của *v* là $\sqrt{a^2+b^2+c^2+2bc}$. (Hình 46)

TH3: Mặt phẳng *(P)* cắt *DC* tại điểm *P* và *(P)* cắt đoạn *EF* tại điểm *Q*, thiết diện là hình bình hành *APGQ*. Làm tương tự TH1, giá trị nhỏ nhất của *v* là $\sqrt{a^2+b^2+c^2+2ac}$. (Hình 47)



Hình 46. TH2 của thiết diện



Hình 47. TH3 của thiết diện

So sánh các TH xảy ra, ta đi đến kết luận *v* nhỏ nhất bằng $\sqrt{a^2+b^2+c^2+2ab}$ khi *(P)* cắt *BF* tại điểm *I* chia đoạn *BF* theo tỉ số *IF/ IB = a / b*.

Tóm tắt lời giải bài toán

TH1. Thiết diện là hình bình hành AIGJ, với I thuộc đoạn BF, J thuộc đoạn DH.

Trải hình vuông BCGF lên mặt phẳng [ABFE] thành hình vuông BFOP sao cho O và E đối xứng với nhau qua BF. Chu vi 2v của thiết diện bằng:

2(*AI* + *IG*) = 2(*AI* + *IO*) ≥ AO = $2\sqrt{a^2+b^2+c^2+2ab}$ không đổi.

TH2: Mặt phẳng *(P)* cắt BC tại điểm *M* và *(P)* cắt đoạn *EH* tại điểm *N*, thiết diện là hình bình hành *AMGN*. Làm tương tự TH1, giá trị nhỏ nhất của 2*v* là $2\sqrt{a^2+b^2+c^2+2bc}$. (Hình 46)

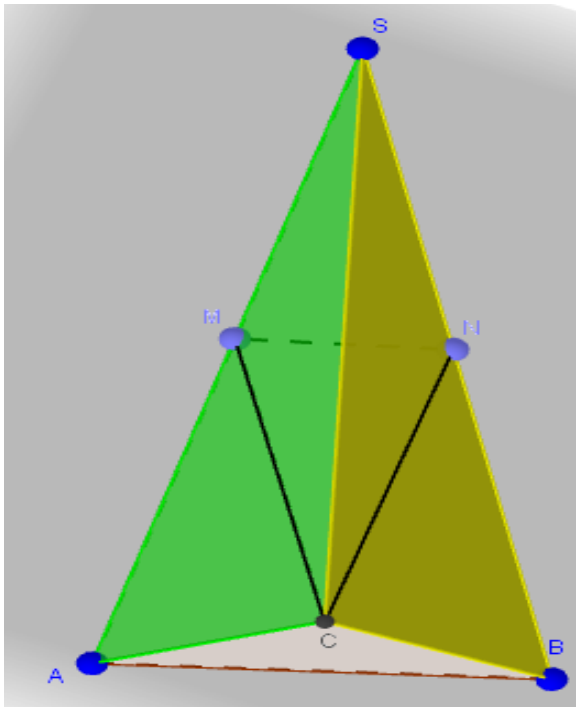
TH3: Mặt phẳng *(P)* cắt *DC* tại điểm *P* và *(P)* cắt đoạn *EF* tại điểm *Q*, thiết diện là hình bình hành *APGQ*. Làm tương tự TH1, giá trị nhỏ nhất của 2*v* là $2\sqrt{a^2+b^2+c^2+2ac}$. (Hình 47)

So sánh TH1, TH2, TH3, với $a \le b \le c$, ta đi đến kết luận *chu vi thiết diện nhỏ nhất* nhỏ nhất bằng $\sqrt{a^2+b^2+c^2+2ab}$ khi *(P)* cắt *BF* tại điểm *I* chia đoạn *BF* theo tỉ số *IF/ IB = a / b*.

Tình huống 4.2. *Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh bên bằng a và góc ở đỉnh S của mặt bên bằng 30^0. Tìm điểm M thuộc cạnh SA và điểm N thuộc cạnh SB sao cho chu vi tam giác CMN nhỏ nhất.* (Hình 48)

+ *Ý tưởng giải bài toán*:

Với bài toán này nếu không biết thủ pháp trải hình thì khó có thể giải được. Ta có thể trải các tam giác *SAC, SBC* lên mặt phẳng (*SAB*) đề biến chu vi tam giác CM thành độ dài đường gấp khúc có hai đầu cố định và độ dài đó ngắn nhất khi nó là đoạn thẳng.



Hình 48. Tìm M, N để chu vi ΔCMN nhỏ nhất

+ *Các hoạt động trên lớp::*

GV: Giao bài toán cho cả lớp làm bài trong 15 phút.

HS: Vẽ hình, suy nghĩ, giải toán.

GV: Gợi ý, hướng dẫn như sau:

- Em đã gặp bài toán nào tương tự bài toán này hay chưa?

- Nếu chưa, em hãy giải bài toán trong mặt phẳng sau đây và vận dụng tương tự: Cho tam giác ABC và điểm K cố định trên BC. Tìm điểm M thuộc cạnh AB và điểm N thuộc cạnh AC sao cho chu vi tam giác KMN nhỏ nhất. Mở rộng hơn là bài toán: Cho tam giác ABC. Tìm ba điểm K, M, N lần lượt trên ba cạnh BC, AB và AC sao cho chu vi tam giác KMN nhỏ nhất.

HS: Trình bày lời giải một trong hai bài toán trên.

GV: Có thể vận dụng tương tự lời giải bài toán trên vào bài toán đã cho như thế nào?

HS: Trải tam giác SAC lên mặt phẳng (SAB) bằng cách quay điểm C xung quanh SA ra phía ngoài hình chóp cho tới khi C ở vị trí D đối xứng với B qua SA. Tương tự, trải tam giác SBC lên mặt phẳng (SAB) bằng cách quay điểm C xung quanh SB ra phía ngoài hình chóp cho tới khi C ở vị trí E đối xứng với A qua SB.

GV: Chú ý rằng trong quá trình quay điểm C như trên ta luôn có $DM = MC$, $EN = NC$. Chu vi tam giác CMN bằng độ dài đường gấp khúc $DMNE$ và nó có giá trị nhỏ nhất khi nào?

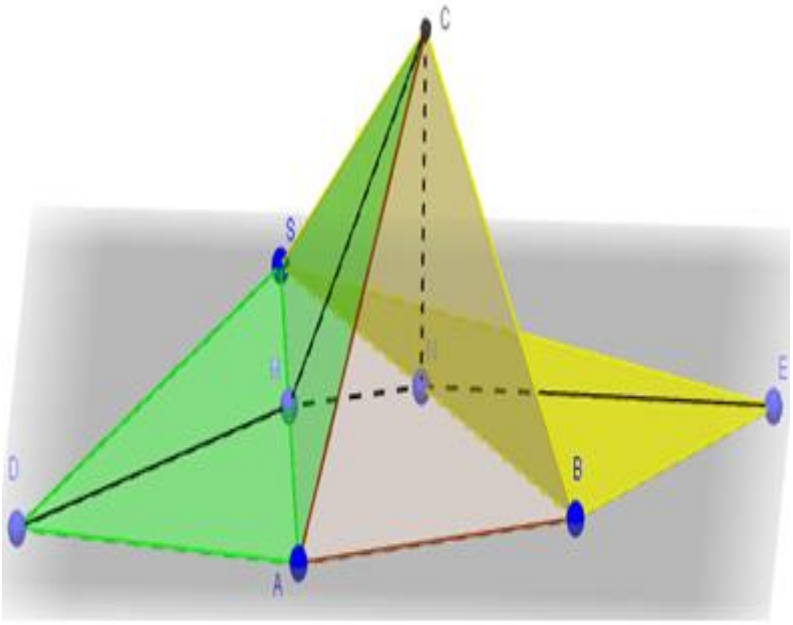
HS: Khi D, M, N, E thẳng hàng.

GV: Giá trị nhỏ nhất đó bằng bao nhiêu?

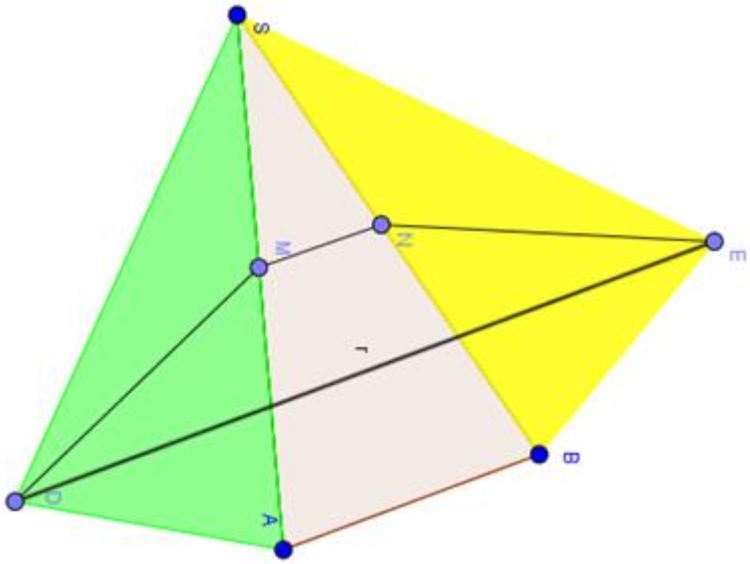
HS: Bằng đoạn DE, *bằng* $a\sqrt{2}$ (do tam giác $S\,DE$ vuông cân tại S).

GV: Vậy khi M, N lần lượt là giao điểm của EF với SA, SB ta được chu vi tam giác AMN bằng đoạn EF là nhỏ nhất.

(Hình 49 và Hình 50)



Hình 49. Trải hai mặt hình chóp lên mặt phẳng mặt còn lại



Hình 50. Khi độ dài DMNE bằng đoạn DE thì ngắn nhất

Tóm tắt lời giải bài toán

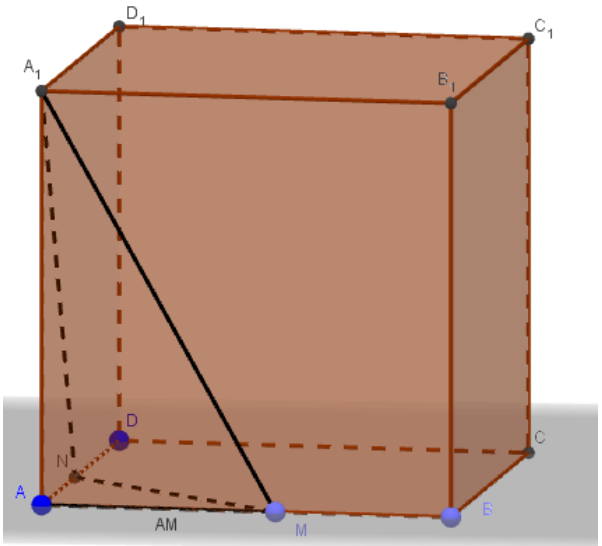
Trải tam giác SAC lên mặt phẳng (SAB) bằng cách quay điểm C xung quanh SA ra phía ngoài hình chóp cho tới khi C ở vị trí D đối xứng với B qua SA. Tương tự, trải tam giác SBC lên mặt phẳng (SAB) bằng cách quay điểm

C xung quanh SB ra phía ngoài hình chóp cho tới khi C ở vị trí E đối xứng với A qua SB.

Ta luôn có *DM = MC, EN = NC*. Dẫn đến chu vi tam giác *CMN* bằng độ dài đường gấp khúc *DMNE* và nó có giá trị nhỏ nhất khi *D, M, N, E* thẳng hàng.

Vậy khi M, N là giao điểm của DE với SA, SB thì chu vi tam giác *CMN* có GTNN. Giá trị đó bằng đoạn *DE, bằng* $a\sqrt{2}$ (do tam giác *S DE* vuông cân tại *S*).

Tình huống 4.3. *Cho hình lập phương ABCD. $A_1B_1C_1D_1$ cạnh a. Xét hai điểm di động: Điểm M di động trên AB và điểm N di động trên AD luôn thỏa mãn AM + AN = a. Chứng minh rằng diện tích toán phần của tứ diện A_1AMN luôn là một số không đổi.* (Hình 51)



Hình 51. Diện tích toàn phần A_1AMN không đổi

Các hoạt động trên lớp

Nếu không biết thủ pháp trải hình thì việc DH giải bài toán này có thể thực hiện như sau:

Hoạt động 1. Tính diện tích toàn phần tứ diện A_1AMN.

GV: Đặt $AM = m$, hãy tính diện tích toàn phần tứ diện A_1AMN theo m và cạnh a của hình lập phương.

HS: Do $AM + AN = a$ và $AM = m$, nên ta tính được diện tích các tam giác vuông A_1AM, A_1AN, AMN như sau:

S(A_1AM) = $\frac{1}{2}am$; S(A_1AN) = $\frac{1}{2}a(a-m)$; S(AMN) = $\frac{1}{2}m(a-m)$;

Gọi AH là đường cao tam giác A_1MN, ta có AH vuông góc với MN (định lí ba đường vuông góc). Ta có:

$$AH = \frac{AM.AN}{MN} = \frac{m(a-m)}{\sqrt{m^2+(a-m)^2}};$$

$$A_1H = \sqrt{AH^2 + A_1A^2} = \sqrt{\frac{m^2(a-m)^2}{m^2+(a-m)^2} + a^2} = \sqrt{\frac{m^2(a-m)^2 + a^2m^2 + a^2(a-m)^2}{m^2+(a-m)^2}}.$$

Từ đó, diện tích toàn phần tứ diện A_1AMN là:

$$S_{tp} = \frac{1}{2}am + \frac{1}{2}a(a-m) + \frac{1}{2}m(a-m) + \frac{1}{2}\sqrt{m^2(a-m)^2 + a^2m^2 + a^2(a-m)^2}$$

Hoạt động 2. Chứng minh diện tích toàn phần của tứ diện A_1AMN không phụ thuộc m

Biến đổi công thức S_{tp} ở trên, ta có:

$$S_{tp} = \frac{1}{2}[(a^2 + m(a-m) + \sqrt{m^2(a-m)^2 + a^2m^2 + a^2(a-m)^2}]$$

$$= \frac{1}{2}[(a^2 + m(a-m) + \sqrt{m^2(a-m)^2 + [am + a(a-m)]^2 - 2a^2m(a-m)}]$$

$$= \frac{1}{2}[(a^2 + m(a-m) + \sqrt{m^2(a-m)^2 + a^4 - 2a^2m(a-m)}]$$

$$= \frac{1}{2}[(a^2 + m(a-m) + \sqrt{[m(a-m) - a^2]^2}] = \frac{1}{2}[(a^2 + m(a-m) + |m(a-m) - a^2|]$$

$= \frac{1}{2}[(a^2 + m(a-m) + a^2 - m(a-m)] = a^2$. (Vì $o \le m \le a$ và $0 \le a - m \le a$)

Ta được điều phải chứng minh.

Chú ý: Cách chứng minh như trên chỉ có một ít HS có thể làm được. Nếu sử dụng thủ pháp trải hình, các hoạt động trên lớp diễn ra như sau:

Hoạt động 1. Trải hình tứ diện A_1AMN

GV: Thực hiện thủ pháp trải hình tứ diện A_1AMN nghĩa là thế nào?

HS: Cắt các mặt của tứ diện A_1AMN và ghép chúng lại trên mặt phẳng.

GV: Ta có thể thực hiện trải hình tứ diện A_1AMN bằng mô hình trực quan như sau: Hãy dùng bìa để cắt được tạo ra bốn tam giác tương ứng bằng bốn mặt của tứ diện; Chú ý tính chất $AM + AN = a$ và chọn cách ghép bốn tam giác đó lại một cách hợp lí!

HS: Thực hành theo từng nhóm.

GV: Chú ý mỗi mặt bên của hình chóp A_1AMN tương ứng bằng một tam giác thuộc hình vuông ABCD

HS: Phát hiện những cặp tam giác bằng nhau: $\Delta A_1AM = \Delta CDN$ (cạnh - góc - cạnh), $\Delta A_1AN = \Delta CBM$ (cạnh - góc - cạnh), $\Delta A_1MN = \Delta CNM$ (cạnh - cạnh - cạnh).

GV: Em nào ghép được một hình "thú vị" nhất?

HS: Em được một hình vuông cạnh a.

GV: Từ đó có thể rút ra kết luận gì?

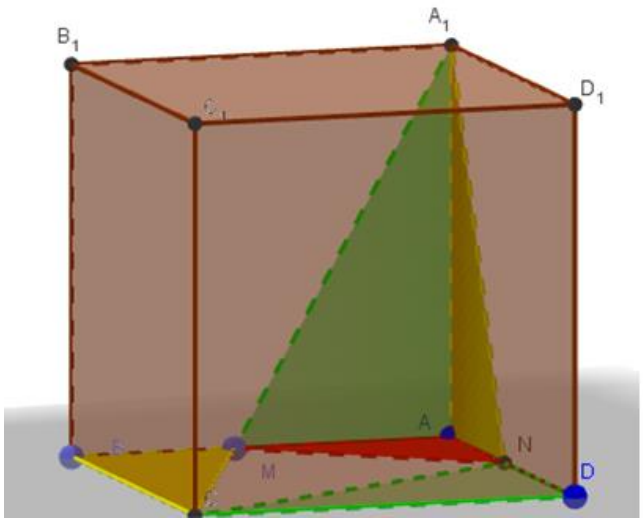
HS: Diện tích toàn phần của tứ diện A_1AMN bằng diện tích hình vuông $ABCD$ cạnh a. (Hình 53)

Tóm tắt lời giải bài toán:

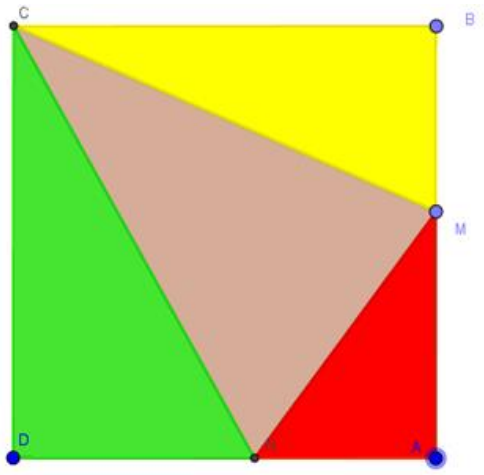
Từ giả thiết $AM + AN = a$ *suy ra* $AM = DN$ *và* $a = BM$.

Dẫn đến $\Delta A_1AM = \Delta CDN$ (cạnh - góc - cạnh), $\Delta A_1AN = \Delta CBM$ (cạnh - góc - cạnh), $\Delta A_1MN = \Delta CNM$ (cạnh - cạnh - cạnh).

Vậy tổng diện tích bốn mặt hình chóp A_1AMN bằng diện tích hình vuông *ABCD*. Suy ra diện tích toàn phần của hình chóp A_1AMN bằng a^2.



Hình 52. Diện tích toàn phần của tứ diện A_1AMN không đổi



Hình 53. 4 mặt tứ diện A_1AMN ghép lại thành hình vuông

Tình huống 4.4. *Cho hình lập phương ABCD. $A_1B_1C_1D_1$ cạnh a. Xét điểm M di động trên cạnh AB và (P) là mặt phẳng qua M, vuông góc với A_1C. Hãy khám phá tính chất của chu vi thiết diện của hình lập phương cắt bởi mặt phẳng (P).*

Các hoạt động trên lớp

Hoạt động 1. Xác định thiết diện

GV: Trong hình lập phương ABCD. $A_1B_1C_1D_1$ có mối quan hệ gì giữa A_1C và hai mặt phẳng (AB_1D_1), (BDC_1) ?

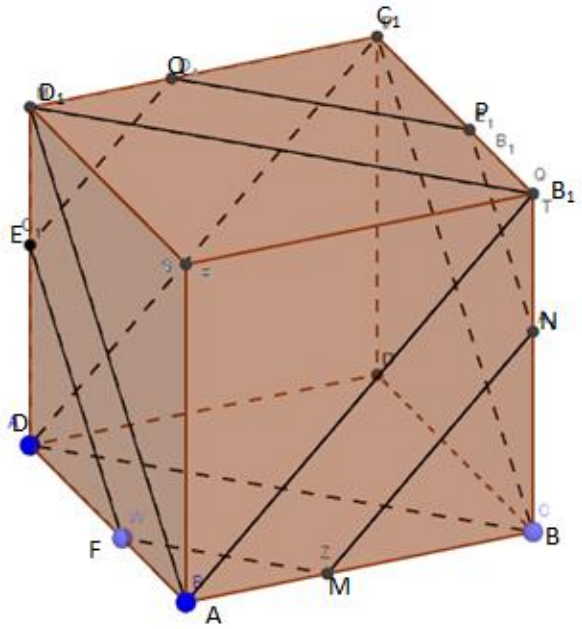
(Bài toán 23 tr 111 SGK HH11 nâng cao)

HS: A_1C vuông góc với hai mặt phẳng (AB_1D_1), (BDC_1).

GV: Vậy quan hệ giữa mặt phẳng (P) đã cho trong bài toán và hai mặt phẳng (AB_1D_1), (BDC_1) là gì?

HS: Mặt phẳng (P) song song với các mặt phẳng (AB_1D_1) và (BDC_1).

GV: Mặt phẳng (P) cắt các mặt của hình lập phương theo các giao tuyến như thế nào?



Hình 54. Thiết diện qua M và vuông góc với AC_1

HS: Mặt phẳng (P) cắt các mặt của hình lập phương theo các giao tuyến song song với một trong những cạnh của hai tam giác AB_1D_1 và BDC_1 trong những mặt của hình lập phương chứa những cạnh đó.

GV: Ta được thiết diện là hình gì?

HS: Thiết diện là lục giác MNPQEF (hình 54).

Hoạt động 2. Khám phá tính chất của chu vi thiết diện.

Nếu không áp dụng thủ thuật trải hình thì các hoạt động trên lớp có thể diễn ra như sau:

GV: Đặt *AM* = *m*, hãy tính chu vi thiết diện theo cạnh *a* của hình lập phương và theo *m*.

HS: Ta có các tam giác *BMN*, B_1NP, C_1PQ vuông cân tại *B*, *AM* = *m* nên *BM* = *a* – *m*, suy ra *MN* = $(a-m)\sqrt{2}$, *NP* = $a\sqrt{2}$, Tương tự ta được: *PQ* = $(a-m)\sqrt{2}$, *QE* = $a\sqrt{2}$, *EF* = $(a-m)\sqrt{2}$, *FM* = $a\sqrt{2}$.

Từ đó suy ra chu vi *MNPQEF* bằng

$$(a-m)\sqrt{2}+a\sqrt{2}+(a-m)\sqrt{2}+a\sqrt{2}+(a-m)\sqrt{2}+a\sqrt{2}=3a\sqrt{2}.$$

Nếu áp dụng thủ thuật trải hình thì các hoạt động trên lớp có thể diễn ra như sau:

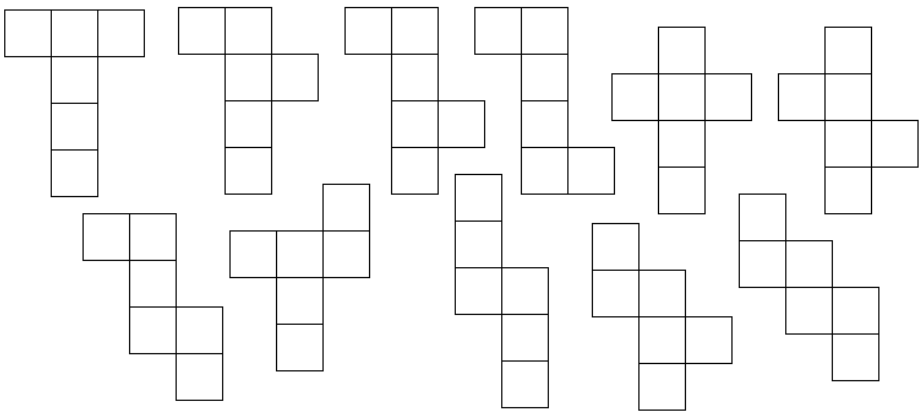
GV: Ta có thể thực hiện trải hình các mặt của hình lập phương lên một mặt phẳng bằng mô hình trực quan như sau: Hãy dùng bìa để cắt tạo ra sáu mặt của hình lập phương và vẽ các cạnh của thiết diện trên từng mặt (chú ý tính chất của mỗi cạnh thiết diện); sau đó chọn cách ghép liền các cạnh của thiết diện một cách hợp lí!

HS: Thực hành theo từng nhóm.

GV: Các em đã biết khi trải hình lập phương lên mặt phẳng ta được bao nhiêu hình dạng hay không?

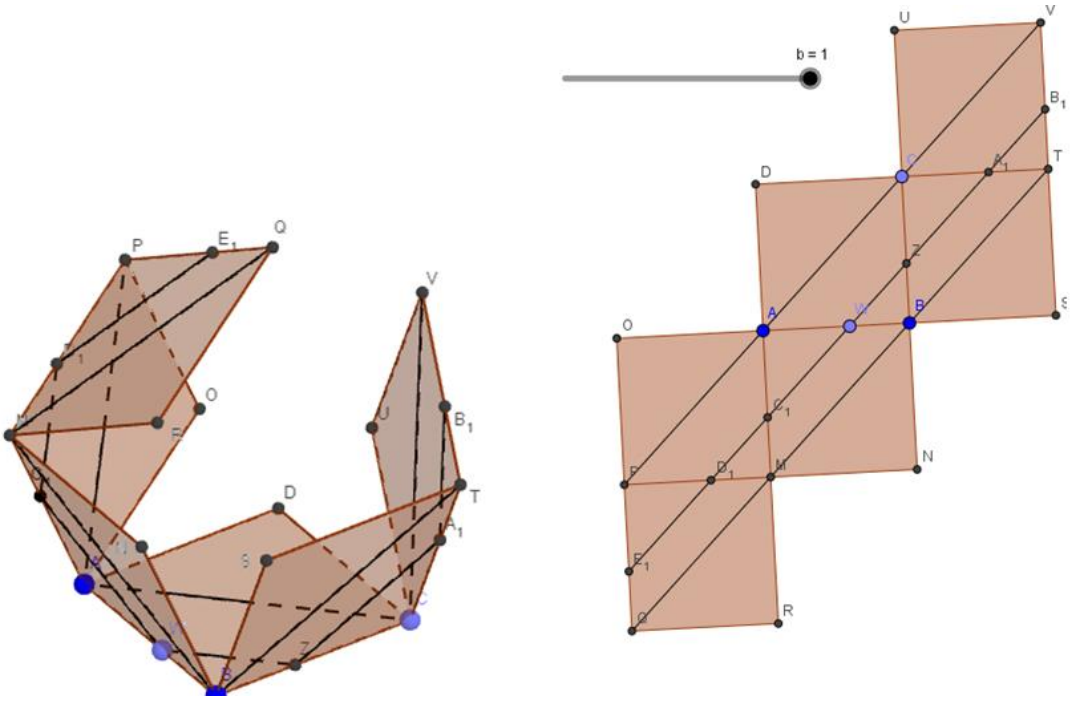
HS: Suy nghĩ để trả lời.

GV: Có 11 hình khai triển của hình lập phương. (Hình 55)



Hình 55. Các phương pháp khai triển một hình lập phương

Trong số các hình khai triển trên, hãy chú ý tới hình cuối cùng, nếu cắt hình lập phương này theo các cạnh AA_1, A_1B_1, BC, CC_1 và trải các mặt của hình lập phương lên mặt phẳng (ABCD). (GV sử dụng chương trình trong phụ lục 5 để trải hình lập phương, hình 2a). Chu vi thiết diện MNPQEF bằng ba lần độ dài đường chéo hình vuông cạnh a, bằng $3a\sqrt{2}$ (Hình 56).



Hình 56. Trải các mặt hình lập phương lên mặt phẳng, chu vi thiết diện bằng ba đoạn đường chéo hình vuông

Tóm tắt lời giải bài toán:

Các tam giác *BMN*, B_1NP, C_1PQ vuông cân tại *B*, *AM* = *m* nên *BM* = *a* – *m*, suy ra *MN* = $(a-m)\sqrt{2}$, *NP* = $a\sqrt{2}$, Tương tự ta được: *PQ* = $(a-m)\sqrt{2}$, *QE* = $a\sqrt{2}$, *EF* = $(a-m)\sqrt{2}$, *FM* = $a\sqrt{2}$.

Từ đó suy ra chu vi *MNPQEF* bằng

$(a-m)\sqrt{2}+a\sqrt{2}+(a-m)\sqrt{2}+a\sqrt{2}+(a-m)\sqrt{2}+a\sqrt{2}=3a\sqrt{2}$ không đổi.

Tình huống 4.5. *Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tứ diện ABCD có các cặp cạnh đối bằng nhau từng đôi là tổng ba góc của ba mặt tại mỗi đỉnh bằng 180^0.*

+ *Ý tưởng giải bài toán*:

Với bài toán này, việc chứng minh điều kiện cần là không khó. Thật vậy, nếu tứ diện *ABCD* có các cặp cạnh đối bằng nhau, tức là *AD = BC, BD = AC, CD = AB* thì bốn mặt tứ diện là những tam giác bằng nhau (theo trường hợp cạnh – cạnh – cạnh). Dẫn đến, tại đỉnh *D* có ba góc lần lượt bằng ba góc của tam giác *ABC*: Góc *BDC* bằng góc *BAC*, góc BDC bằng góc BAC, góc BDC bằng góc BAC (các góc tương ứng của hai tam giác bằng nhau). Từ đó tổng ba góc của ba mặt tại đỉnh D bằng tổng ba góc của tam giác ABC, bằng 180^0. Tại các đỉnh khác tương tự.

Có thể chứng minh bài toán này, cả điều kiện cần và điều kiện đủ bằng thủ pháp trải hình như trình bày dưới đây.

+ *Các hoạt động trên lớp*:

Hoạt động 1. Chứng minh điều kiện cần

GV: Giả thiết là gì, điều phải chứng minh là gì?

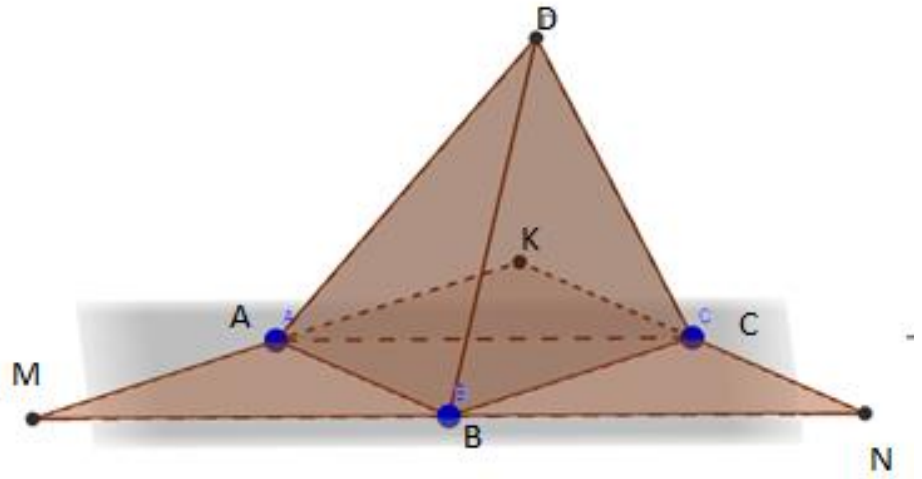
HS: Giả thiết cho tứ diện *ABCD có AD = BC, BD = AC, CD = AB*. Điều phải chứng minh là: Tổng ba góc của ba mặt tại mỗi đỉnh bằng 180^0.

GV: Cụ thể tại đỉnh A có ba góc nào và cần phải chứng minh điều gì?

HS: Ta phải chứng minh tổng ba góc DAB, DAC, BAC bằng 180^0.

GV: Nếu ta lần lượt trải các tam giác *DAB* bằng cách quay nó xung quanh *AB* áp vào mặt phẳng (*ABC*) ta được tam giác *ABM* nối liền với tam giác *ABC*. Tương tự, trải tam giác *DBC* thành tam giác *BCN* nối liền với tam giác *ABC* trải tam giác *DAC* thành tam giác *ACK* nối liền với tam giác *ABC*. Các tam giác *MAB, KAC, NCB* ở ngoài tam giác ABC. Hãy phát hiện các tính chất về

hình mới xuất hiện trên mặt phẳng (ABC). Đồng thời GV mở file hình minh họa (xem phụ lục 7) (hình 57).



Hình 57. Trải ba mặt bên hình chóp lên mặt đáy

HS: Ta được *ABCK* là hình bình hành (tứ giác có hai cặp cạnh đối bằng nhau từng đôi). Tương tự *AMBC* và *ABNC* là hình bình hành. Suy ra các điểm M, B, N thẳng hàng, các điểm M, A, K thẳng hàng, các điểm K, C, N thẳng hàng. Dẫn đến *A* là trung điểm *MK*, *B* là trung điểm *MN*, *C* là trung điểm *NK*.

GV: Ba góc tại đỉnh A của tứ diện được trải ra thành những góc nào và tổng của chúng bằng bao nhiêu?

HS: Ba góc tại đỉnh A của tứ diện được trải ra thành ba góc kề nhau trong mặt phẳng (ABC) là các góc MAB, BAC, CAK và tổng của chúng bằng góc bẹt, tức bằng 180^0. Ta được điều phải chứng minh.

Hoạt động 2. Chứng minh điều kiện đủ

GV: Giả thiết là gì, điều phải chứng minh là gì?

HS: Giả thiết cho tứ diện *ABCD* có tổng ba góc của ba mặt tại mỗi đỉnh bằng 180^0. Ta phải chứng minh : $AD = BC$, $BD = AC$, $CD = AB$.

GV: Thủ thuật trải hình như trên có thể hỗ trợ cho việc chứng minh điều kiện đủ hay không?

HS: Suy nghĩ, tìm lời giải.

GV: Nếu tại mỗi đỉnh A, B, C của tứ diện có ba góc mà tổng của chúng bằng 180^0 thì khi trải hình như trên ta được tính chất gì về ba điểm *M, A, K* ?

HS: Ta được *AM* = *AK* (cùng bằng *AD*) và tổng ba góc MAB, BAC, CAK bằng 180^0, tức *M, A, K* thẳng hàng và *A* là trung điểm *MK*.

GV: Từ đó suy ra được điều phải chứng minh hay chưa?

HS: Ta có *A* là trung điểm *MK*. Tương tự: *B* là trung điểm *MN*, *C* là trung điểm *NK*. Từ đó suy ra *ABCK* là hình bình hành, *AK* = *BC*. Mà *AK* = *AD*. Vậy *AD* = *BC*. Tương tự *BD* = *AC*, *CD* = *AB*. Ta được điều phải chứng minh.

Tóm tắt lời giải bài toán

+ Điều kiện cần: Trải các tam giác *DAB, DBC, DCA* lên mặt phẳng (*ABC*) ta lần lượt được tam giác *ABM, BCN, ACK* ở ngoài tam giác *ABC*, thỏa mãn *M* đối xứng với *C* qua *AB*, *N* đối xứng với *A* qua *BC*, *K* đối xứng với *B* qua *AC*.

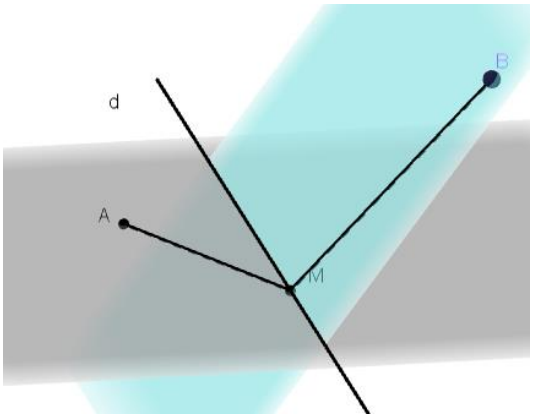
Ta có: *AM* = *AK* (cùng bằng *AD*) và tổng ba góc MAB, BAC, CAK bằng 180^0, nên *M, A, K* thẳng hàng và *A* là trung điểm *MK*. Tương tự:

B là trung điểm *MN*, *C* là trung điểm *NK*. Từ đó suy ra *ABCK* là hình bình hành, *AK* = *BC*. Mà *AK* = *AD*. Vậy *AD* = *BC*. Tương tự *BD* = *AC*, *CD* = *AB*. Ta được điều phải chứng minh.

+ Điều kiện đủ: Trải hình như điều kiện cần, ta được *ABCK* là hình bình hành (có các cặp cạnh đối bằng nhau từng đôi). Vậy *AK // BC*. Tương tự *AM // BC*, dẫn đến *M, A, K* thẳng hảng. Suy ra tổng ba góc ở *A* của ba mặt tứ diện bằng góc bẹt *MAK*, bằng 180^0. Ta được điều phải chứng minh.

Tình huống 4.6. *Cho hai nửa mặt phẳng (P), (Q) cắt nhau theo giao tuyến (d). Trên nửa mặt phẳng (P) có một điểm A cố định; Trên nửa mặt phẳng (Q)*

có một điểm B cố định, A và B không thuộc (d). Tìm trên (d) một điểm M sao cho MA + MB nhỏ nhất. (Hình 58)



Hình 58. Tìm điểm M trên d sao cho MA + MB nhỏ nhất

Các hoạt động trên lớp

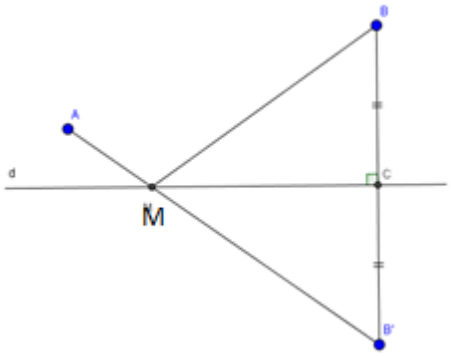
GV: Giao bài toán và yêu cầu HS suy nghĩ, giải bài toán trong 15 phút.

HS: Vẽ hình, suy nghĩ, giải toán.

GV: Gợi ý, hướng dẫn như sau:

- Em đã gặp bài toán nào trong mặt phẳng tương tự bài toán này hay chưa?
- Nếu chưa, em hãy giải bài toán sau:

Trong mặt phẳng cho hai điểm A và B thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ (d). Tìm trên (d) một điểm M sao cho MA + MB nhỏ nhất.



Hình 59. MA + MB nhỏ nhất khi A, M, B’ thẳng hàng

HS: Trình bày lời giải bài toán trên: Lấy B’ đối xứng với B qua (Δ). Điểm M cần tìm là giao điểm của (d) và đoạn AB’ (Hình 59).

GV: Vận dụng lời giải bài toán này vào bài toán đã cho.

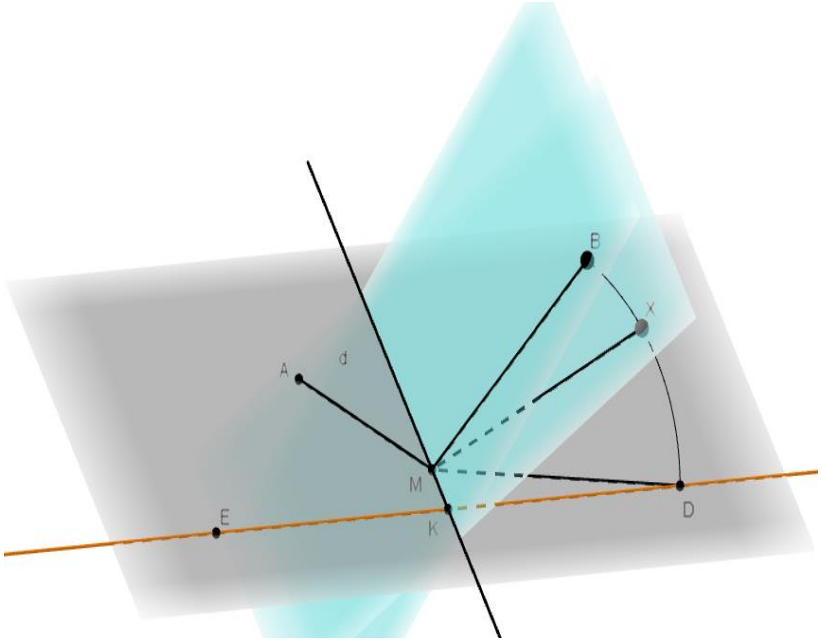
HS: Suy nghĩ sử dụng bài toán đã gợi ý để giải bài toán đã cho.

GV: Trải mặt phẳng (Q) chứa điểm B lên mặt phẳng (P) sao cho A thuộc hai nửa mặt phẳng bờ d của mặt phẳng (P). Hãy chú ý: độ dài MB không thay đổi khi B quay xung quanh (d) đến vị trí B’. GV sử dụng chương trình trong phụ lục 3 đã được thiết kế hình học với hỗ trợ của phần mềm GeoGebra, để minh họa cho việc quay điểm B quay xung quanh (d). Vậy M ở vị trí nào thì tổng MA + MB nhỏ nhất?

HS: Khi M là giao điểm của (d) và AB’ (Hình 60)

GV: Có thể diễn tả về điểm M tìm được như thế nào?

HS: M là điểm chia đoạn hình chiếu của đoạn AB trên (d) theo tỉ số khoảng cách từ A và từ B đến (d). (Tương tự kết quả trong TH 1 của tình huống 1.2)



Hình 60. Quay cho hai mặt phẳng trùng nhau

Tóm tắt lời giải bài toán

Trải nửa mặt phẳng (Q) chứa điểm B lên mặt phẳng (P) sao cho B đến vị trí B' khác nửa mặt phẳng với A. (Hình 60).

Với mọi điểm M thuộc d ta có: $MB = MB'$, $MA + MB = MA + MB' \geq AB'$ không đổi.

Vậy $MA + MB$ nhỏ nhất bằng AB', khi M là giao điểm của AB' và d.

Những ví dụ trên cho thấy: Trải hình là một thủ thuật đặc trưng trong Hình học; việc sử dụng thủ thuật này đôi khi cho là những lời giải bài toán Hình học độc đáo.

2.3. Kết luận chương 2

HHKG là phân môn mà hầu hết các giáo viên dạy Toán và các HS THPT cho là phân môn khó dạy và khó học. Phân môn này khó bởi vì nghiên cứu HHKG là nghiên cứu những hình, khối trong không gian mà chúng ta đang sống ở trong đó, dựa trên hình biểu diễn những hình khối đó trên mặt phẳng.

Việc vẽ hình trong HHKG thường khó và mất khá nhiều thời gian trên lớp, nên không ít các thầy cô giáo đã né tránh việc này. Điều đó càng làm cho việc tiếp thu kiến thức về Hình học không gian của HS bị hạn chế. Chỉ một số ít HS có trí tưởng tượng tốt mới thuận lợi trong việc học phân môn này.

Để góp phần khắc phục khó khăn trong dạy và học HHKG, nhiều nhà nghiên cứu, nhiều nhà giáo đã có những ứng dụng CNTT vào DH HHKG.

Từ những kết luận rút ra từ khảo sát thực trạng ở chương 1, chúng tôi đã có những định hướng và đề xuất một số biện pháp sử dụng CNTT trong DH HHKG như sau:

(1) Sử dụng phần mềm hình học động để vẽ hình, hoặc tạo ra mô hình trực quan, mô hình phỏng thực tiễn giúp HS hiểu bài giảng

(2) Sử dụng phần mềm hình học động hỗ trợ giải toán quỹ tích hoặc hỗ trợ phát hiện yếu tố bất biến, yếu tố cần tìm trong bài toán Hình học không gian

(3) Sử dụng phần mềm hình học động hỗ trợ kiểm nghiệm các phán đoán và tìm kiếm trong DH giải toán Hình học không gian

(4) Sử dụng phần mềm hình học động hỗ trợ DH giải bài toán Hình học không gian bằng thủ pháp "trải hình"

Những biện pháp này giúp cho giờ học hấp dẫn hơn, ý nghĩa hơn và góp phân nâng cao hiệu quả DH HHKG.

Chương 3
THỰC NGHIỆM SƯ PHẠM

3.1. Mục đích và tổ chức thực nghiệm sư phạm

3.1.1. Mục đích và giả thuyết thực nghiệm sư phạm

+ Mục đích: Thực nghiệm sư phạm (TNSP) nhằm đánh giá tính khả thi, hiệu quả của những biện pháp sử dụng CNTT vào DH HHKG đã đề xuất trong chương 2 luận án.

+ Giả thuyết TNSP: Nếu vận dụng những biện pháp sử dụng CNTT vào DH HHKG đã đề xuất trong chương 2 luận án thì HS sẽ thông hiểu kiến thức hơn và bước đầu có kĩ năng vận dụng phần mềm hình học động hỗ trợ giải một số dạng toán HHKG tương tự những bài toán trong luận án.

3.1.2. Tổ chức thực nghiệm sư phạm và phương pháp đánh giá kết quả thực nghiệm sư phạm

Hoạt động 1: Xin ý kiến góp ý, đánh giá cho các biện pháp đã đề xuất.

Chúng tôi đã gặp gỡ, trình bày về các biện pháp DH thiết kế ở chương 2 luận án với 102 giáo viên Toán thuộc 15 trường THPT tại 8 tỉnh, thành phố để xin ý kiến góp ý, đánh giá cho các biện pháp đã đề xuất. Mẫu phiếu xin ý kiến xin xem phụ lục 8. Kết quả đánh giá xin trình bày ở mục 3.3.

Các trường THPT tại 8 tỉnh, thành phố đó là:

STT	Số GV	Trường THPT	Tỉnh, Thành
1	8	Thái Phiên	Hải Phòng
2	7	An Lão	Hải Phòng
3	7	Phạm Tất Văn	Hải Phòng
4	8	Minh Khai	Hà Nội
5	10	Kim Liên	Hà Nội
6	7	Quế Võ 1	Bắc Ninh
7	6	Thuận Thành 1	Bắc Ninh

8	6	Lại Yên	Sơn La
9	8	Chu Văn Thịnh	Sơn La
10	7	Công nghiệp Việt Trì	Phú Thọ
11	6	Hai Bà Trưng	Huế
12	6	Bùi Hữu Nghĩa	Cần Thơ
13	7	Bình Thủy	Cần Thơ
14	5	Hiểu Tử	Trà Vinh
15	4	Cầu Ngang A	Trà Vinh
n	102		

** Mẫu phiếu điều tra (và kết quả kèm theo)*

PHIẾU THAM KHẢO Ý KIẾN GIÁO VIÊN VỀ CÁC BIỆN PHÁP SỬ DỤNG PHẦN MỀM HÌNH HỌC ĐỘNG VÀO DẠY HỌC HÌNH HỌC KHÔNG GIAN Ở TRƯỜNG THPT

Trong quá trình nghiên cứu đề tài "Dạy học Hình học không gian ở trường THPT với sự hỗ trợ của công nghệ thông tin và truyền thông", chúng tôi đề xuất bốn biện pháp sử dụng phần mềm hình học động vào dạy học Hình học không gian ở trường THPT như sau:

(1) Sử dụng phần mềm hình học động để vẽ hình, hoặc tạo ra mô hình trực quan, mô hình phỏng thực tiễn giúp HS hiểu bài giảng

(2) Sử dụng phần mềm hình học động hỗ trợ giải toán quỹ tích hoặc hỗ trợ phát hiện yếu tố bất biến, yếu tố cần tìm trong bài toán Hình học không gian

(3) Sử dụng phần mềm hình học động hỗ trợ kiểm nghiệm các phán đoán và tìm kiếm trong dạy học giải toán Hình học không gian

(4) Sử dụng phần mềm hình học động hỗ trợ dạy học giải bài toán Hình học không gian bằng thủ pháp "trải hình"

Để đánh giá tính mới, tính khả thi và hiệu quả của các biện pháp nêu trên, xin quý thầy/cô cho biết ý kiến về các vấn đề sau đây bằng cách đánh dấu x vào một phương án được lựa chọn trong bảng hỏi sau đây:

BP	**Tính mới của các biện pháp đối với bản thân**	không mới	Ít mới	trung bình	khá mới	rất mới
1	Sử dụng phần mềm hình học động vẽ hình, tạo mô hình trực quan	12	19	40	31	0
2	Sử dụng phần mềm hình học động hỗ trợ giải toán quỹ tích, tìm tòi	14	14	52	22	0
3	Sử dụng phần mềm hình học động hỗ trợ kiểm nghiệm các phán đoán và tìm kiếm	0	0	0	78	24
4	Sử dụng phần mềm hình học động dạy học giải bài toán HHKG bằng thủ pháp "trải hình"	0	0	0	78	24
B	**Tính khả thi, hiệu quả của các biện pháp**	không khả thi	ít khả thi	trung bình	khá khả thi	rất khả thi
1	Sử dụng phần mềm hình học động vẽ hình, tạo mô hình trực quan	0	0	8	45	49
2	Sử dụng phần mềm hình học động hỗ trợ giải toán quỹ tích, tìm tòi	0	0	16	46	40
3	Sử dụng phần mềm hình học động hỗ trợ kiểm nghiệm các phán đoán và tìm kiếm	12	45	41	2	2
4	Sử dụng phần mềm hình học động dạy học giải bài toán HHKG bằng thủ pháp "trải hình"	0	6	44	35	17
C	**Tác dụng của các biện pháp đối với bản thân**	không tác dụng	ít tác dụng	trung bình	khá tác dụng	rất tác dụng
1	Sử dụng phần mềm hình học động vẽ	0	0	62	40	0

	hình, tạo mô hình trực quan					
2	Sử dụng phần mềm hình học động hỗ trợ giải toán quỹ tích, tìm tòi	0	2	79	20	2
3	Sử dụng phần mềm hình học động hỗ trợ kiểm nghiệm các phán đoán và tìm kiếm	8	23	26	21	24
4	Sử dụng phần mềm hình học động dạy học giải bài toán HHKG bằng thủ pháp "trải hình"	2	23	35	22	20

Hoạt động 2: TNSP một số tiết dạy tại trường phổ thông.

Chúng tôi đã và tiến hành dạy bốn tiết TNSP tại hai trường THPT. Mỗi lớp dạy TNSP tương ứng với một lớp đối chứng, có sĩ số và học lực tương đương (dựa vào kết quả đánh giá chất lượng đầu năm học của Ban giám hiệu trường THPT). GV dạy lớp TNSP và GV dạy lớp đối chứng tương đương về tuổi đời, tuổi nghề và về năng lực dạy học.

Các lớp TNSP và các lớp đối chứng tương ứng cụ thể như sau:

Lớp TNSP (sĩ số)	Lớp ĐC (sĩ số)	Trường THPT, tỉnh/ thành phố	GV dạy lớp TNSP	GV dạy lớp ĐC
12A 42	12B 41	Kim Liên, Hà Nội	Lê Văn Cường	Nguyễn Thị Hường
12A6 40	12A7 41	An Lão, Hải Phòng	Phạm Thu Hà	La Viết Vinh
12A1 38	12A2 39	Phù Yên, Sơn La	Lê Đức Đạt	Bùi Anh Quân
12A10 45	12A6 46	Lương Đình Của Tp Cần Thơ	Nguyễn Văn Tặng	Lê Văn Toàn

Thời gian tiến hành TNSP:

Từ ngày 21 tháng 9 đến ngày 06 tháng 10 năm 2015 TNSP giáo án 1 tại trường THPT Kim Liên, Hà Nội và tại trường THPT An Lão, Hải phòng;

Từ ngày 28/03 đến ngày 15/04 năm 2016 TNSP giáo án 2 tại trường THPT Phù Yên, Sơn La và trường THPT Chuyên Lý Tự Trọng, Tp Cần Thơ.

Nội dung bài dạy được trình bày ở mục 3.2; Két quả đánh giá xin trình bày ở mục 3.3.

+ Các bước chuẩn bị thực nghiệm sư phạm:

Bước 1: Tác giả luận án chuẩn bị nội dung TNSP: các phiếu hỏi giáo viên, giáo án TNSP, đề bài kiểm tra (xem các phụ lục 3, 4, 5, 6).

Bước 2: Tác giả luận án liên hệ với một số trường THPT đặt vấn đề TNSP. Các trường có TNSP không có đặc điểm riêng biệt nào, có trường ở một quận thuộc thành phố trực thuộc trung ương (thành phố Hà Nội), có trường ở vùng nông thôn (An Lão, Hải Phòng), có trường ở vùng núi (Phù Yên, Sơn La), có trường thuộc miền Tây Nam Bộ (Cần Thơ). Sau khi được sự đồng ý của Ban giám hiệu nhà trường, tác giả luận án đã gặp gỡ, trao đổi với các giáo viên Toán thuộc tổ Toán của các trường đó về nội dung TNSP qua hai hoạt động đã trình bày ở trên. Tiếp đó, tác giả luận án đã liên hệ với một số GV dạy TNSP và dạy các lớp đối chứng tại các trường THPT có TNSP, trao đổi về mục đích, nội dung, tổ chức TNSP, phương pháp đánh giá kết quả TNSP, xin ý kiến về phiếu hỏi sau TNSP, về bài kiểm tra và đề kiểm tra.

Bước 3: Triển khai TNSP.

Bước 4: Xử lí kết quả TNSP.

Đánh giá kết quả hoạt động 2: Kết thúc bài thực nghiệm, chúng tôi tiến hành kiểm tra ở lớp thực nghiệm và lớp đối chứng với cùng một đề, cùng thời gian làm bài, chấm bài với cùng đáp án và thang điểm. Sau đó chúng tôi tiến hành tổng hợp, phân tích, xử lí kết quả các bài kiểm tra bằng phương pháp thống kê toán học, đánh giá về cả hai mặt: định lượng và định tính. Đồng thời

chúng tôi cũng tổ chức lấy ý kiến của các GV dự giờ thực nghiệm, đánh giá về tiết dạy thực nghiệm.

Hoạt động 3. Nghiên cứu trường hợp.

Chúng tôi nhờ hai GV Toán là Trịnh Hoàng Tuấn và Đinh Quốc Khánh trường THPT Bùi Hữu Nghĩa, thành phố Cần Thơ lập một nhóm gồm 6 HS lớp cuối lớp 11 năm học 2015 – 2016 theo dõi sự tiến bộ của các em trong quá trình trang bị phần mềm GeoGebra và vận dụng phần mềm này vào kiểm nghiệm những dự đoán, tìm kiếm, khám phá lời giải bài toán, dựa theo nội dung chương 2 của luận án. Qua đó có những đánh giá, rút ra bài học, kinh nghiệm, góp phần chỉnh sửa một số lỗi trong những tình huống đã đề xuất.

3.2. Giáo án thực nghiệm sư phạm

Giáo án 1 (2 tiết): Khái niệm về mặt tròn xoay – Mặt trụ (Hình học 12)

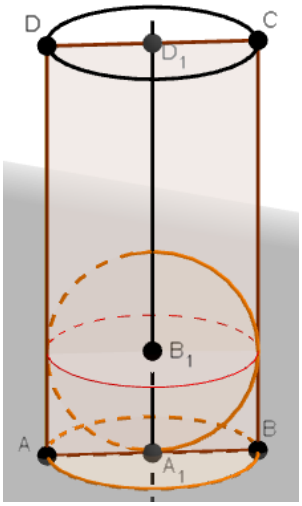
+ Mục tiêu của hai tiết này là làm cho HS hiểu được khái niệm mặt tròn xoay và mặt trụ, biết về giao tuyến của mặt trụ tròn xoay và mặt phẳng.

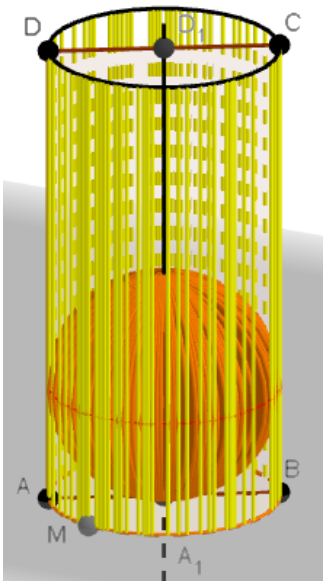
+ Nội dung bài học: Theo nội dung trong SGK.

Lớp đối chứng dạy như thông thường.

Lớp TNSP dạy theo giáo án sau:

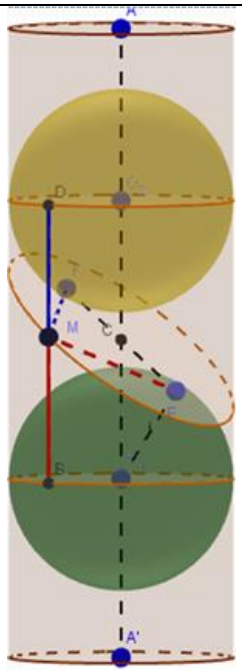
Tiết 1. Khái niệm mặt tròn xoay và mặt trụ

Hoạt động (HĐ) của GV	Hoạt động của HS	t
HĐ1. Tạo ra mặt tròn xoay Ta có hình vẽ đường tròn tiếp xúc với ba cạnh hình chữ nhật. Khi ta quay hình này xung quanh trục *BN* ta được những hình gì? Chi tiết hơn: - Điểm *A* quay thành hình gì? - Đoạn *AD* quay thành hình gì?		15’

- Đường tròn quay thành hình gì? - Hình chữ nhật quay thành hình gì? GV sử dụng phần mềm GeoGebra hỗ trợ quay hình.	- Điểm M quay thành đường tròn - Đoạn AD quay thành các đường thẳng song song - Đường tròn quay thành mặt cầu - Hình chữ nhật quay thành hình trụ	
HĐ 2. Tiếp cận khái niệm Các em có thể nói gì về mối quan hệ: - Giữa mặt cầu (O) và mỗi đường thẳng do cạnh hình chữ nhật khi quay tạo nên (giống như một chiếc que đặt trên một quả bóng) ? - Giữa mặt cầu (O) và mặt phẳng chứa đường tròn do đáy hình chữ nhật khi quay tạo nên (giống như quả bóng đặt trên mặt bàn) ? - Giữa các tiếp tuyến từ A, từ B đến đường tròn (O) trong quá trình quay?	HS quan sát (và làm theo nếu có thể)  - Mỗi đường thẳng do cạnh hình chữ nhật khi quay tạo luôn tiếp xúc với mặt cầu - Mặt cầu (O) tiếp xúc với mặt phẳng do cạnh AB của hình chữ nhật khi quay tạo nên. - Các tiếp tuyến từ A, từ B đến đường tròn (O) trong quá trình	15’

	quay luôn bằng nhau.	
HĐ3. Hợp thức hóa một số khái niệm và một số tính chất rút ra từ những hoạt động trên: Mặt cầu, Mặt trụ, Mặt tròn xoay. Đường tròn lớn, Tiếp diện, Tiếp tuyến, Tiếp xúc, Mặt cầu nội tiếp.	HS ghi chép hoặc đánh dấu trong SGK Các tính chất: - Mỗi đường sinh của mặt nón/ mặt trụ đều là tiếp tuyến của mặt cầu nội tiếp nó; - Mọi đường thẳng trong mặt phẳng tiếp diện của mặt cầu đi qua tiếp điểm đều là tiếp tuyến của mặt cầu; - Hai tiếp tuyến của mặt cầu xuất phát từ cùng một điểm thì bằng nhau.	15’

Tiết 2. Thiết diện của mặt trụ cắt bởi mặt phẳng

Hoạt động (HĐ) của GV	Hoạt động của HS	t
HĐ1. Đặt vấn đề + Sử dụng phần mềm GeoGebra vẽ giao của mặt trụ (T) và mặt phẳng (P). + Thiết diện là hình gì khi: . (P) vuông góc với trục mặt trụ? . (P) xiên góc với trục mặt trụ? + Tại sao?		15’

	. (P) vuông góc với trục mặt trụ thì thiết diện là hình tròn. . (P) xiên góc với trục mặt trụ thì thiết diện là hình elip.	
HĐ2. Dẫn dắt giải quyết vấn đề + Trong tiết 1 chúng ta đã có hình ảnh một mặt cầu nội tiếp trong một mặt trụ. Nếu có một mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu đó và cắt mặt trụ theo một đường elip (theo nhận xét của các em)(GV sử dụng GeoGebra vẽ hình) thì từ một điểm M bất kì trên elip, ta có những tiếp tuyến nào đến mặt cầu? + Nếu ta có một mặt cầu thứ hai ở miền không gian không chứa mặt cầu thứ nhất và cũng tiếp xúc với (T) và (P) (xem hình vẽ), hãy những phát hiện các cặp tiếp tuyến bằng nhau từ M đến từng mặt cầu. + Hãy chứng minh M thuộc elip, theo định nghĩa của elip.	+ Có 2 tiếp tuyến là . Đường sinh mặt trụ qua M . Đoạn nối M và tiếp điểm của mặt cầu và mặt phẳng. + Ta có các cặp tuyến bằng nhau là : $MF_1 = ME_1$ $MF_2 = ME_2$. + Cộng hai đẳng thức trên, ta được $MF_1 + MF_2 = E_1E_2$ không đổi. Vậy thiết diện là elip.	10’
HĐ3. Liên hệ với thực tiễn: Hãy lấy một số hình ảnh trong thực tế về thiết diện của mặt trụ cắt bởi	- Cốc nước hình trụ đặt nghiêng sẽ có mặt nước hình elip. - Cắt vát một ống nước, ống tre/ nứa.	5’

mặt phẳng.	- Bóng nắng của một quả bóng.	
HĐ4. Kiểm tra, đánh giá cuối bài bằng trắc nghiệm khách quan.	Xem đề bài tại mục 3.3.1.1. dưới đây.	15’

Giáo án 2:

Ôn tập cuối năm lớp 11 về quan hệ song song và quan hệ vuông góc trong không gian (Hình học 11) (2 tiết).

Theo phân phối chương trình (chuẩn), có 4 tiết ôn tập cuối năm, chúng tôi sử dụng hai tiết để TNSP.

Phương pháp TNSP:

Cả hai lớp cùng giới thiệu cho HS thủ pháp trải hình trong giải các bài toán trên, nhưng khác nhau là lớp TNSP có sử dụng CNTT trong giờ dạy, còn lớp đối chứng không sử dụng CNTT trong giờ dạy.

Giả thuyết của chúng tôi là: Nếu sử dụng CNTT trong giờ dạy sẽ làm cho HS hiểu bài hơn, nhớ bài hơn, vận dụng vào giải bài toán tương tự tốt hơn.

Nội dung giáo án TNSP:

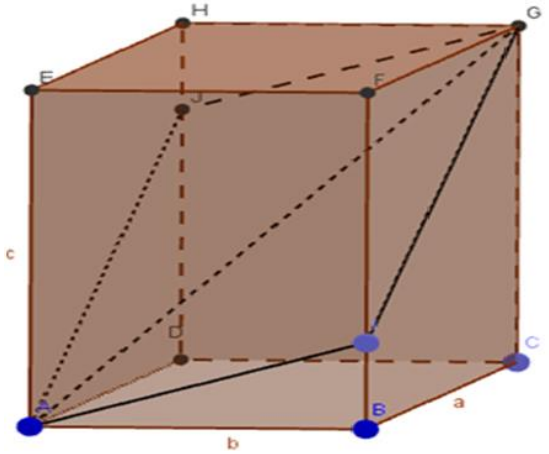
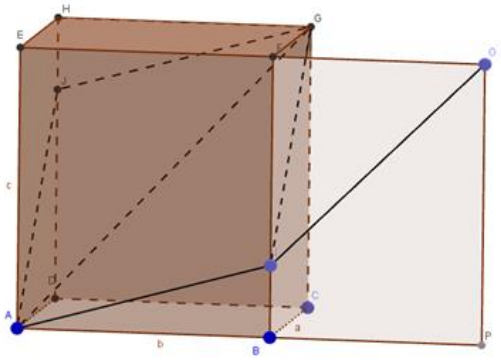
Dạy học ba bài toán sau:

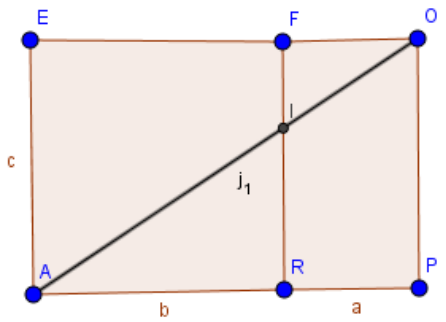
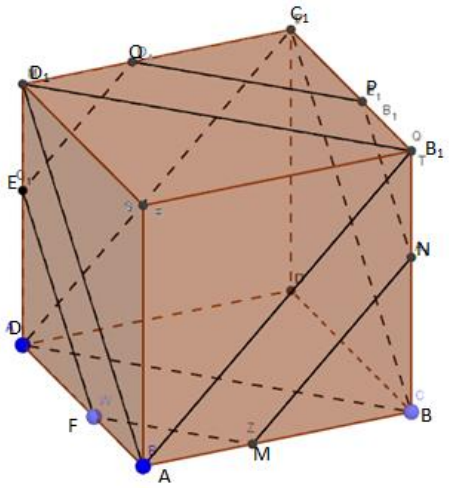
Bài toán 1. Cho hình lập phương ABCD.EFGH cạnh a. Xác định thiết diện của hình lập phương cắt bởi mặt phẳng (P) qua AG sao cho chu vi thiết diện có giá trị nhỏ nhất.

Bài toán 2. Cho hình lập phương ABCD. $A_1B_1C_1D_1$ cạnh a. Xét điểm M di động trên cạnh AB và (P) là mặt phẳng qua M, vuông góc với A_1C. Hãy khám phá tính chất của chu vi thiết diện của hình lập phương cắt bởi mặt phẳng (P).

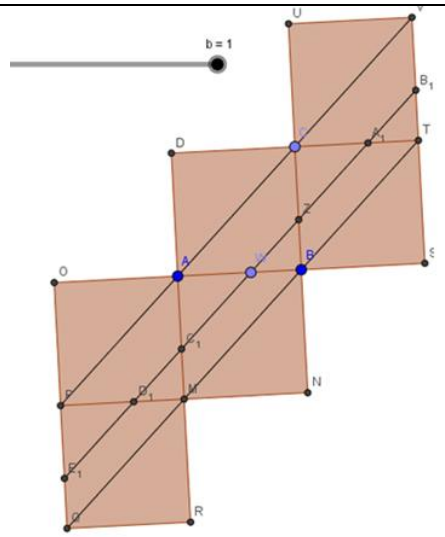
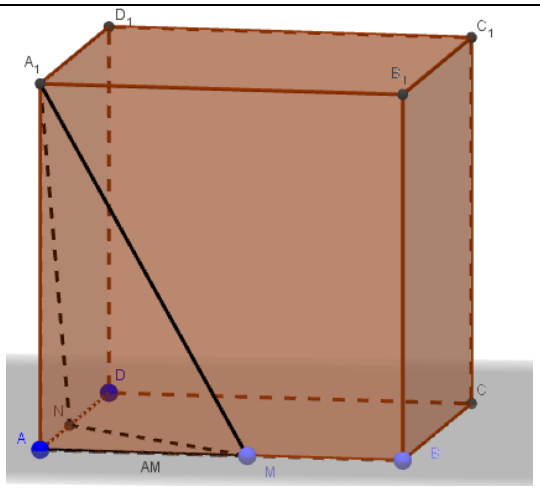
Bài toán 3**.** Cho hình lập phương ABCD. $A_1B_1C_1D_1$ cạnh a. Xét hai điểm di động: Điểm M di động trên AB và điểm N di động trên AD luôn thỏa mãn AM + AN = a. Chứng minh rằng diện tích toán phần của tứ diện A_1AMN luôn là một số không đổi.

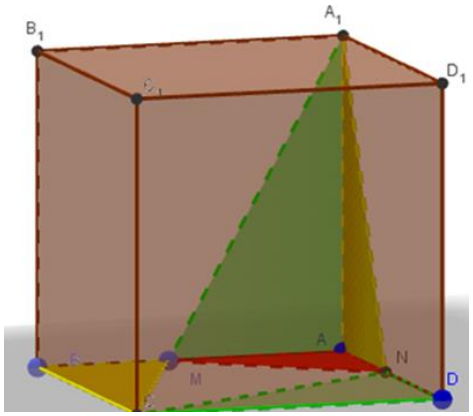
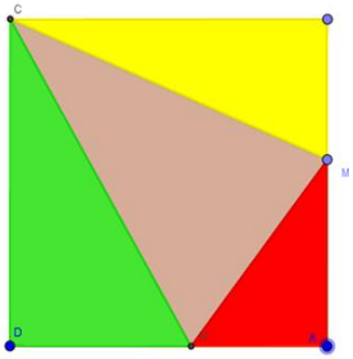
Lớp TNSP dạy theo giáo án sau:

Hoạt động (HĐ) của GV	Hoạt động của HS	t
Bài toán 1. Vẽ hình bằng phần mềm GeoGebra. + Giả sử *(P)* cắt cạnh *BF* tại điểm *I*, thiết diện là hình gì, vì sao?	 + Thiết diện là hình bình hành (tính chất hai mặt phẳng song song cùng cắt mặt phẳng thứ ba).	45’
+ Chu vi thiết diện nhỏ nhất bằng bao nhiêu? Khi nào?	+ Đặt *BI* = *x*, chu vi thiết diện tính là *C* = *2v*, với *v* = *AI* + *IG* = $\sqrt{b^2+x^2}+\sqrt{a^2+(c-x)^2}$.	
+ Bây giờ ta trải mặt *BCGF* lên mặt phẳng (*ABFE*) sao cho hình vuông *BCGF và ABFE* xếp liền kề nhau (sử dụng GeoGebra vẽ hình minh họa) – gọi là thủ pháp “Trải hình”. Khi đó nửa chu vi thiết diện là tổng hai đoạn AI và IC. Vị trí nào của điểm *I* thì tổng này nhỏ nhất?	 + AI + IG nhỏ nhất khi ba điểm thẳng hàng. Khi đó điểm *I* chia đoạn *BF* theo tỉ số *IF/ IB* = *a / b*	

+ Khi đó giá trị nhỏ nhất của chu vi thiết diện bằng bao nhiêu? + Còn TH nào khác của thiết diện hay không? + Thêm 2 TH này, GTNN của chu vi thiết diện có thay đổi hay không?	 + Khi đó chu vi thiết diện băng *2v* $= 2\sqrt{(a+b)^2+c^2} = 2\sqrt{a^2+b^2+c^2+2ab}$. + Còn có các TH sau xảy ra: TH2: Mặt phẳng *(P)* cắt BC tại điểm *M* và *(P)* cắt đoạn *EH* tại điểm *N*, thiết diện là hình bình hành *AMGN*. TH3: Mặt phẳng *(P)* cắt *DC* tại điểm *P* và *(P)* cắt đoạn *EF* tại điểm *Q*, thiết diện là hình bình hành *APGQ*. + Cách làm và kết quả tương tự. Nên GTNN của chu vi thiết diện không thay đổi.	
Bài toán 2. Vẽ hình bằng phần mềm GeoGebra. HĐ1. Xác định thiết diện + Trong hình lập phương ABCD. $A_1B_1C_1D_1$ có mối quan hệ gì giữa A_1C và hai mặt phẳng (AB_1D_1), (BDC_1) ?		25’

+ Vậy quan hệ giữa mặt phẳng (P) đã cho trong bài toán và hai mặt phẳng (AB_1D_1), (BDC_1) là gì? + Mặt phẳng (P) cắt các mặt của hình lập phương theo các giao tuyến như thế nào? Thiết diện là hình gì? HĐ2. Khám phá tính chất của chu vi thiết diện + Thiết diện có tính chất gì? + Hãy phát hiện tính chất của chu vi, diện tích thiết diện. Đặt *AM* = *m*, hãy tính chu vi thiết diện theo cạnh *a* của hình lập phương và theo *m*. HĐ3. Áp dụng thủ thuật trải hình Cách 1. Sử dụng GeoGebra vẽ thiết diện và trải các mặt hình lập phương lên mặt phẳng, chu vi thiết diện bằng ba đoạn đường chéo hình vuông Cách 1: Hãy dùng bìa để cắt tạo ra sáu mặt của hình lập phương và vẽ các cạnh của thiết diện trên từng mặt (chú ý tính chất của mỗi cạnh thiết diện); sau đó chọn cách	+ A_1C vuông góc với hai mặt phẳng (AB_1D_1), (BDC_1). + Mặt phẳng (P) song song với các mặt phẳng (AB_1D_1) và (BDC_1). + (P) cắt các mặt của hình lập phương theo các giao tuyến song song với một trong những cạnh của hai tam giác AB_1D_1 và BDC_1 trong những mặt của hình lập phương chứa những cạnh đó. + Thiết diện là lục giác MNPQEF có các tính chất: . Từng cặp cạnh đối diện của thiết diện song song với nhau. . MN = PQ = EF, NP = QE = FM . Các góc tại đỉnh của thiết diện đều bằng 120^0. Chu vi *MNPQEF* bằng: $(a-m)\sqrt{2}+a\sqrt{2}+(a-m)\sqrt{2}+a\sqrt{2}+(a-m)\sqrt{2}+a\sqrt{2}=3a\sqrt{2}$, không đổi.	

ghép liền các cạnh của thiết diện một cách hợp lí!		
Bài toán 3. Vẽ hình bằng phần mềm GeoGebra. HĐ1. Tính diện tích toàn phần tứ diện A_1AMN theo a và $m = AM$ Có 3 cách tính mặt huyền của tứ diện vuông: Cách 1. Tính bằng nửa tích cạnh đáy và chiều cao. Cách 2. Dựa vào công thức: $B = \frac{3V}{h}$ với $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{(a-m)^2}$ Cách 3. Dựa vào tính chất: $S^2_{A'MN} = S^2_{A'MN} + S^2_{A'AM} + S^2_{A'AN}$ HĐ 2. Chứng minh của tứ diện A_1AMN không phụ thuộc m Cách 1. Biến đổi công thức S_{tp} .	 Kết quả S_{tp} tứ diện A_1AMN là: $S_{tp} = \frac{1}{2}am + \frac{1}{2}a(a-m) + \frac{1}{2}m(a-m)$ $+ \frac{1}{2}\sqrt{m^2(a-m)^2 + a^2m^2 + a^2(a-m)^2}$ + Ta có: $S_{A'MN}$ $= \frac{1}{2}\sqrt{m^2(a-m)^2 + a^2m^2 + a^2(a-m)^2}$ $= \frac{1}{2}\sqrt{m^2(a-m)^2 + a^4 - 2a^2m(a-m)}$	20’ 25’

Cách 2. Sử dụng phần mềm GeoGebra trải các mặt tứ diện lên mặt phẳng [*ABCD*] + Chú ý phát hiện những cặp tam giác bằng nhau.  Cũng có thể dùng bìa để cắt tạo ra bốn tam giác tương ứng bằng bốn mặt của tứ diện và ghép chúng lại một cách hợp lí!	$= \frac{1}{2}\sqrt{[m(a-m)-a^2]^2}$ $= \frac{1}{2}(m(a-m)-a^2)$. Từ đó suy ra: $S_{tp} = a^2$. + Ta có $\Delta A_1AM = \Delta CDN$, $\Delta A_1AN = \Delta CBM$, $\Delta A_1MN = \Delta CNM$.  Bốn mặt tứ diện ghép thành hình vuông cạnh a.	

3.3. Đánh giá kết quả thực nghiệm sư phạm

3.3.1. Đánh giá định lượng

Chúng tôi đánh giá định lượng qua bài kiểm tra

3.3.1.1. Đánh giá kết quả TNSP giáo án 1

* Đề kiểm tra trắc nghiệm khách quan 15 phút sau TNSP đợt 1 như sau:

Khoanh tròn vào đáp án đúng trong các câu hỏi sau

Câu 1. Trong không gian cho một đường thẳng Δ và một điểm M. Gọi (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc với Δ, gọi O là giao điểm của (P) và Δ.

Khi cho M quay xung quanh Δ thì M tạo nên hình gì trong các hình sau

A: mặt phẳng (P)

B: đường tròn trong (P)

C: đường tròn tâm O, bán kính OM trong (P)

D: đường tròn tâm O.

Câu 2. Trong mặt phẳng (P) cho đường thẳng Δ và đường tròn (C). Khi cho (C) quay xung quanh Δ, ta được hình gì trong những trường hợp sau?

A: hình tròn

B: mặt cầu

C: mặt trụ

D: mặt khác

Khi Δ đi qua tâm của (C)	A	B	C	D
Khi Δ không đi qua tâm của (C)	A	B	C	D

Câu 3. Trong không gian cho hai đường thẳng phân biệt Δ và d. Khi cho d quay xung quanh Δ, ta được hình gì trong những trường hợp sau?

A: hình tròn

B: mặt cầu

C: mặt trụ

D: mặt khác

Khi d // Δ	A	B	C	D
Khi d và Δ chéo nhau	A	B	C	D

Câu 4. Có một chiếc bàn đặt sao cho mặt bàn song song với mặt đất và một cốc nước hình trụ đựng hơn nửa cốc nước. Mặt nước là hình gì trong các hình

A: hình tròn

B: hình cầu

C: hình elip

D: hình khác

Trong mỗi trrường hợp sau

Khi cốc nước đặt đứng trên mặt bàn	A	B	C	D
Khi cốc nước đặt nghiêng trên mặt bàn	A	B	C	D

Câu 5. Về hiện tượng cốc nước đặt nghiêng trên mặt bàn (mặt bàn song song với mặt đất bằng phẳng) sẽ có mặt nước hình elip.

1) Em có biết điều đó không?

A: biết

B: không

2) Em có hiểu khi được giải thích điều đó không?

A: hiểu

B: không hiểu

3) Theo em, giải thích điều đó có khó không?

A: không khó

B: khó

4) Em có thể giải thích được điều đó không?

A: có thể

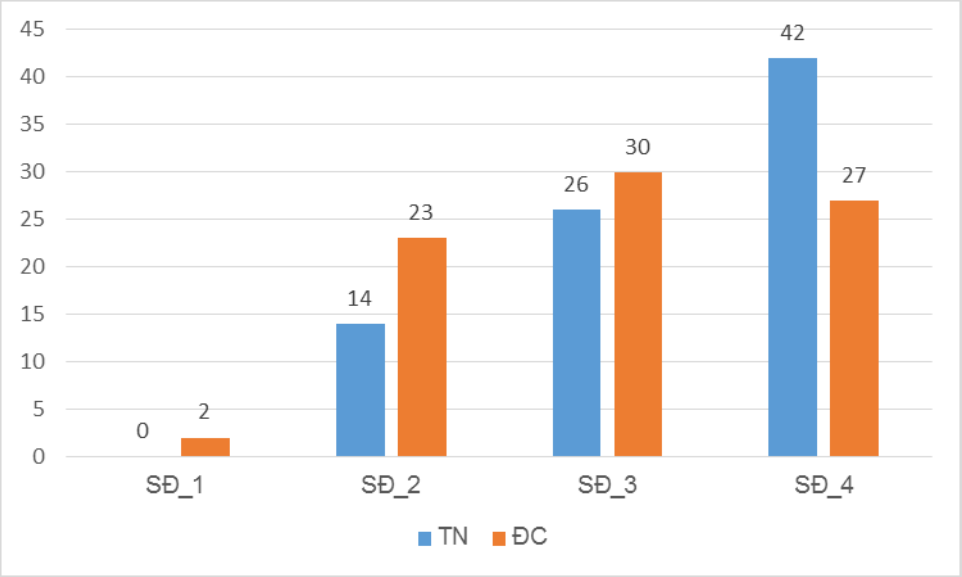
B: không thể

* *Kết quả các câu 1,2,3,4 (đánh giá kiến thức, mỗi câu)*

(kí hiệu TN – lớp thực nghiệm, ĐC – lớp đối chứng, SĐ_n: số điểm n)

Lớp	SĐ_1	SĐ_2	SĐ_3	SĐ_4	Tổng
TN	0	14	26	42	82
ĐC	2	23	30	27	82

* Biểu đồ



* Nhận xét: HS lớp TNSP có kết quả làm bài kiểm tra tốt hơn, do tác dụng của việc ứng dụng CNTT vào dạy học HHKG.

* Kiểm định giả thuyết thống kê:

Giả thuyết H_0: $\overline{X}_{TN} = \overline{X}_{DC}$: Điểm trung bình của bài kiểm tra ở các lớp TNSP và ở các lớp đối chứng khác nhau là không thực chất, với mức ý nghĩa $\propto = 0{,}05$.

Đối thuyết H_1: $\overline{X}_{TN} > \overline{X}_{DC}$: Điểm trung bình của bài kiểm tra ở các lớp TNSP cao hơn ở các lớp đối chứng là thực chất, với mức ý nghĩa $\propto = 0{,}05$.

Chọn mức ý nghĩa $\propto = 0{,}05$. Để kiểm định giả thuyết H_0 ta sử dụng đại lượng ngẫu nhiên Z. Với $Z = \dfrac{\left|\overline{X}_{TN} - \overline{X}_{DC}\right|}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}}$

Từ các thông số thống kê ở trên: $n_1 = 82$, $n_2 = 82$.

Tính theo các công thức:

$\bar{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} n_i X_i}{n}$ là điểm trung bình, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$.

$S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} n_i (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$ là phương sai mẫu đã hiệu chỉnh, S là độ lệnh chuẩn.

$V = \frac{S}{X} . 100\%$ là hệ số biến thiên.

Ta được: $\bar{X}_{TN} = 3,3415$; $\bar{X}_{DC} = 3$;

$S_1^2 = 0,5733$,$S_2^2 = 0,716$ ta có: $Z = 2,723091$.

Với $\propto = 0,05$ ta tìm giá trị giới hạn Z_t: $\emptyset(Z_t) = \frac{1-2\alpha}{2} = \frac{1-2.0,05}{2} = 0,45$.

Tra bảng các giá trị Laplace ta có là $Z_t = 1,65$. So sánh Z và Z_t ta có: Z > Z_t. Như vậy với mức ý nghĩa $\propto = 0,05$ thì sự khác nhau về điểm số trung bình của các lớp TNSP và các lớp đối chứng là thực chất. Giả thuyết H_0 bị bác bỏ, do đó giả thuyết H_1 được chấp nhận. Vậy điểm trung bình của bài kiểm tra ở các lớp TNSP và ở các lớp đối chứng là thực chất; chứng tỏ PPDH như đã đề xuất trong luận án thực sự có hiệu quả hơn so với phương pháp giảng dạy thông thường.

* *Thống kê kết quả câu 5 (đánh giá hiệu quả DH có sử dụng CNTT)*:

Mỗi câu nếu tích vào trường hợp A sẽ được 1 điểm.

Phân loại như sau

Loại A: 4 điểm

Loại B: 3 điểm

Loại C: 2 điểm

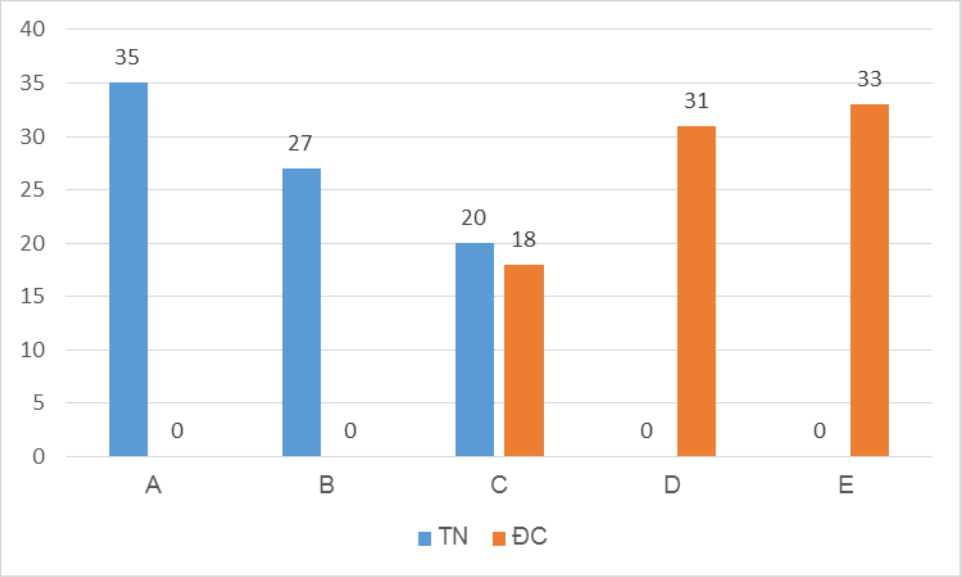
Loại D: 1 điểm

Loại E: 0 điểm

* *Bảng kết quả câu 5*:

Lớp	A	B	C	D	E	Tổng
TN	35	27	20	0	0	82
ĐC	0	0	18	31	33	82

* Biểu đồ



* Nhận xét: HS lớp TNSP hiểu bài và nắm được bài hơn HS lớp đối chứng. Điều đó chứng minh được giá trị của việc ứng dụng CNTT trong DH HHKG.

3.3.2.2. Đánh giá kết quả TNSP giáo án 2

* Đề bài kiểm tra 45 phút sau TNSP đợt 2 như sau:

Câu 1. Cho hình hộp chữ nhật ABCD. $A_1B_1C_1D_1$ có AD = , AB = b, AA_1 = c, a ≤ b ≤ c. Xác định thiết diện của hình lập phương cắt bởi mặt phẳng (P) qua AC_1 sao cho chu vi thiết diện có giá trị nhỏ nhất.

Câu 2. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng [ABC], SA = 2a. Tìm điểm M trên cạnh AB sao cho MA + MC nhỏ nhất.

b) Mục tiêu của bài kiểm tra và thang điểm 10:

Câu 1 (5 điểm): Đánh giá mức độ vận dụng tương tự và thông hiểu của HS.

Phân phối điểm như sau:

- Vẽ hình: 1 điểm
- Xác định được 1 trường hợp của thiết diện 1 điểm.
- Xác định được 1 vị trí của thiết diện để chu vi thiết diện nhỏ nhất 1 điểm.
- Có thêm trường hợp của thiết diện 1 điểm.

- So sánh các trường hợp của thiết diện 1 điểm.

Chu vi thiết diện nhỏ nhất khi mặt phẳng thiết diện cắt cạnh BB_1 tại điểm I chia BB_1 theo tỉ số $IB/IB_1 = b/a$. GTNN đó bằng $2\sqrt{a^2+b^2+c^2+2ab}$.

Câu 2 (5 điểm)

- Vẽ hình: 1 điểm
- Xác định được điểm cần tìm: 4 điểm
- Tính được GTNN là $a\sqrt{13+6\sqrt{3}}$: 1 điểm

Bảng tổng hợp điểm

(kí hiệu TN – lớp thực nghiệm, ĐC – lớp đối chứng, SĐn – số điểm n)

Sĩ số	SĐ0	SĐ1	SĐ2	SĐ3	SĐ4	SĐ5	SĐ6	SĐ7	SĐ8	SĐ9	SĐ10
TN	0	0	0	2	4	6	33	11	18	8	2
ĐC	0	0	0	2	7	27	41	8	0	0	0

Bảng 3.1

Từ bảng 3.1 phân loại thành 4 cột:

- Cột giỏi: gồm các điểm 9 – 10.
- Cột khá: gồm các điểm 7 – 8.
- Cột trung bình: gồm các điểm 5 – 6.
- Cột yếu (dưới trung bình) : gồm các điểm 1 – 4.

Ta được bảng 3.2 sau đây:

(Kí hiệu: Y – yếu , TB - , K - , G)

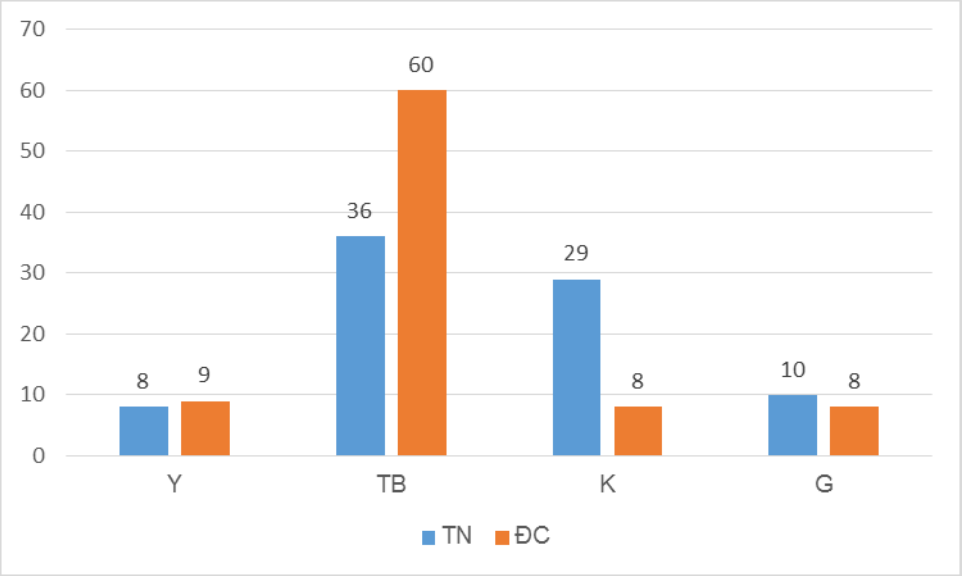
Lớp	Y	TB	K	G	Tổng
TN	8	36	29	10	83
ĐC	9	60	8	8	85

Bảng 3.2

Bảng 3.2 cho thấy số HS khá giỏi của các lớp TNSP cao hơn các lớp đối chứng. Ngược lại số HS trung bình và dưới trung bình của các lớp TNSP thấp hơn các lớp đối chứng.

Nguyên nhân dẫn đến kết quả trên là HS lớp TN được sử dụng CNTT trong giờ dạy làm cho các em hiểu bài tốt hơn, nhớ cách giải kiểu bài toán hơn các em ở lớp đối chứng.

Biểu đồ so sánh kết quả bài kiểm tra sau thực nghiệm ở hai lớp TNSP:



Kiểm định giả thuyết thống kê:

Giả thuyết H_0: $\overline{X}_{TN} = \overline{X}_{DC}$: Điểm trung bình của bài kiểm tra ở các lớp TNSP và ở các lớp đối chứng khác nhau không có ý nghĩa thống kê, với mức ý nghĩa $\propto = 0,05$.

Đối thuyết H_1: $\overline{X}_{TN} > \overline{X}_{DC}$: Điểm trung bình của bài kiểm tra ở các lớp TNSP và ở các lớp đối chứng khác nhau có ý nghĩa thống kê.

Chọn mức ý nghĩa $\propto = 0,05$. Để kiểm định giả thuyết H_0 ta sử dụng đại lượng ngẫu nhiên Z. Với $Z = \dfrac{\left|\overline{X}_{TN} - \overline{X}_{DC}\right|}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}}$

Từ các thông số thống kê ở trên: $n_1 = 83$, $n_2 = 85$.

Tính theo các công thức:

$\overline{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} n_i X_i}{n}$ là điểm trung bình, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$.

$S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{X})^2}{n-1}$ là phương sai mẫu đã hiệu chỉnh, S là độ lệnh chuẩn.

$V = \dfrac{S}{X}.100\%$ là hệ số biến thiên.

Ta được: $\overline{X}_{TN} = 6{,}5181$; $\overline{X}_{DC} = 6{,}1647$;

$S_1^2 = 1{,}5698$, $S_2^2 = 1{,}3535$

Từ đó suy ra: $Z = 1{,}8932$.

Với $\propto$ = 0,05 ta tìm giá trị giới hạn $Z_t : \Phi(Z_t) = \dfrac{1-2\alpha}{2} = \dfrac{1-2.0{,}05}{2} = 0{,}45$.

Tra bảng các giá trị Laplace ta có là $Z_t = 1{,}65$.

So sánh Z và Z_t ta có: Z > Z_t.

Như vậy:

Với mức ý nghĩa $\propto$ = 0,05 thì sự khác nhau về điểm trung bình của các lớp TNSP và các lớp đối chứng là có ý nghĩa thống kê; Giả thuyết H_0 bị bác bỏ, do đó giả thuyết H_1 được chấp nhận. Vậy điểm trung bình của bài kiểm tra ở các lớp TNSP cao hơn ở các lớp đối chứng là thực chất, với mức ý nghĩa α = 0,05; Điều đó chứng tỏ phương pháp dạy học như đã đề xuất trong luận án thực sự có hiệu quả hơn so với phương pháp giảng dạy thông thường.

3.3.2. *Đánh giá kết quả nghiên cứu trường hợp*

Hai GV hỗ trợ chúng tôi theo dõi và đánh giá sự tiến bộ của nhóm HS lớp 11 năm học 2015 – 2016, trong việc sử dụng CNTT trong học tập, đã thực hiện một lộ trình như sau, trong tháng 7 năm 2016:

* Tuần 1:

+ Tạo nhóm nghiên cứu.

Kết quả: Danh sách HS trong nhóm thuộc thành phố Cần Thơ

STT	Họ và Tên	Trường THPT	Điểm Toán 11	Điểm Tin 11
1	Trần Văn Lực	Bình Thủy	9	8,5
2	Phan Văn Phúc	Bình Thủy	7	8
3	Phạm Sơn Hà	Hà Văn Tập	8	7
4	Hồ Thị Ánh Như	Hà Văn Tập	8,5	8
5	Ng Trọng An	Hà Văn Tập	8	7
6	Lê Thiên Nhi	Hà Văn Tập	7	8

+ Khảo sát tiên nghiệm năng lực Toán học và năng lực Tin học của nhóm HS thông qua bài kiểm tra.

- *Bài kiểm tra đánh giá năng lực Toán học (30 phút làm bài):*

Câu 1. Trong mặt phẳng cho hai điểm A, B và đường thẳng d. Tìm điểm M thuộc d sao cho MA + MB nhỏ nhất, trong hai trường hợp: A, B khác nửa mặt phẳng bờ d; A, B khác cùng nửa mặt phẳng bờ d.

Câu 2. Trong không gian cho hai điểm A, B và mặt phẳng (P). Tìm điểm M thuộc (P) sao cho MA + MB nhỏ nhất.

Kết quả: Cả 6 HS làm được câu 1, có 5 HS làm được câu 2.

Đánh giá: Năng lực Toán học của các em đều khá.

- *Bài kiểm tra năng lực Tin học* Tự cài đặt và làm quen với phần mềm GeoGebra 5.0 trên máy tính điện tử trong 30 phút. Sau đó vẽ tam giác ABC trong mặt phẳng cơ sở (Oxy); lấy một điểm D ở ngoài mặt phẳng (Oxy) và lập trình quay điểm D xung quanh đường thẳng BC sao cho D đến vị trí D’ thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho D‘ và A khác nửa mặt phẳng bở BC. (Thời gian: 30 phút), (HS có thể trao đổi và giúp đỡ nhau sao cho mọi người trong nhóm cùng làm được)

Kết quả: Mọi HS trong nhóm đều hoàn thành công việc được giao.

Như vậy, tiền đề về năng lực Toán và Tin của cả nhóm đã được bảo đảm.

* Tuần 2: Thực hành sử dụng CNTT hỗ trợ học tập trong 120 phút.

+ 30 phút đầu giải 2 bài toán sau

Bài 1. Trong mặt phẳng cho hai điểm A, B và đường thẳng d, đoạn AB không cắt d. Tìm điểm M thuộc d sao cho góc AMB lớn nhất.

Bài 2. Trong không gian cho hai điểm A, B và mặt phẳng (P). Tìm điểm M thuộc (P) sao cho góc AMB lớn nhất.

Kết quả: Không có em nào làm được.

+ 60 phút tiếp theo: Dự đoán điểm cần tìm trong bài 1 và sử dụng phần mềm GeoGebra 5.0 hỗ trợ kiểm nghiệm kết quả dự đoán, có thể trao đổi thảo luận trong nhóm và nhờ sự hỗ trợ của GV.

Kết quả: Có các dự đoán sau về điểm cần tìm

- Góc vuông là góc lớn nhất;
- M cách đều A và B (M là giao điểm của d và đường trung trực của đoạn AB);
- M là hình chiếu của trung điểm đoạn AB lên d;
- M là một trong hai hình chiếu của A hoặc B lên d;
- M là điểm mà MA + MB nhỏ nhất (như bài khảo sát tuần trước)

Như vậy, không có em nào đoán đúng điểm cần tìm, nhưng các em biết cách dùng hình vẽ trong trường hợp đặc biệt để bác bỏ những dự đoán không đúng.

+ 30 phút cuối buổi: GV gợi ý sử dụng phần mềm GeoGebra 5.0 khám phá tính chất của điểm cần tìm:

- Lập bảng giá trị góc AMB khi M di chuyển trên d để tìm ra điểm có góc AMB lớn nhất, cố định điểm đó, gọi là N;
- Vẽ đường tròn qua ba điểm A, M, B và đường tròn qua ba điểm A, N, B; Xem xét tính chất khác biệt của điểm N và các điểm M khác.

Kết quả: Cả nhóm đều phát hiện ra tính chất là đường tròn qua ba điểm A, N, B tiếp xúc với d. Có thể về nhà chứng minh điều đó là đúng.

* Tuần 3: Thực hành sử dụng CNTT hỗ trợ học tập trong 120 phút (tương tự tuần 2) với 2 bài toán mới:

Bài 1. Trong không gian cho hai mặt phẳng (P), (Q) cắt nhau theo giao tuyến d. Lấy điểm A thuộc (P) và lấy điểm B thuộc (Q), A và B không thuộc d. Tìm điểm M thuộc d sao cho AM + MB nhỏ nhất.

Bài 2. Trong không gian cho hai điểm A, B và đường thẳng d, hai đường thẳng d và AB chéo nhau. Tìm điểm M thuộc d sao cho góc AMB lớn nhất.

Kết luận về nghiên cứu trường hợp:

Theo dõi hoạt động học của HS dựa trên nội dung luận án cho thấy: Có những bài toán tưởng như đơn giản, nhưng không dễ giải được; Có những dự đoán mà việc xác định tính đúng sai của dự đoán đó phải mất khá nhiều thời gian. Nếu biết sử dụng CNTT, ta có thể giảm bớt khó khăn, công sức và giảm bớt thời gian về những việc đó. Điều đó thể hiện rất rõ qua nghiên cứu trường hợp của chúng tôi. Các HS trong nhóm mà chúng tôi nghiên cứu rất hào hứng với cách thức tổ chức và nội dung làm việc; đặc biệt các em rất phấn khởi vì những gì học được qua nghiên cứu của chúng tôi.

3.3.3. Đánh giá định tính

3.3.3.1. *Mẫu phiếu xin ý kiến của GV và HS và kết quả kèm theo:*

PHIẾU THAM KHẢO Ý KIẾN GIÁO VIÊN
VỀ THỰC NGHIỆM SƯ PHẠM

Xin các thầy cô cho biết ý kiến bằng cách khoanh tròn vào phương án đã lựa chọn.

Tiêu chuẩn đánh gia	**Mức đánh giá (50 GV)**			
	Không tán thành A	**Ít tán thành B**	**Tán thành C**	**Rất tán thành D**
Giáo án				
Giáo án dễ thực hiện	A	B	C	D
Giáo án có nhiều tính mới về PPDH	A	B	C	D
Giáo án rất hiệu quả	A	B	C	D
Giáo án có nhiều hoạt động tốt	A	B	C	D
Giáo viên (GV) trên lớp				
GV rất vững kiến thức Toán	A	B	C	D
GV có PP tiếp cận vấn đề tốt	A	B	C	D
GV rất có PP hướng dẫn HS GQVĐ	A	B	C	D
GV rất có PP lôi cuốn HS	A	B	C	D
HS (HS) trên lớp				
HS tích cực tham gia xây dựng bài	A	B	C	D
HS hiểu bài tốt	A	B	C	D
HS làm bài tốt	A	B	C	D
HS rất thích thú với bài học	A	B	C	D

THỐNG KÊ KẾT QUẢ
PHIẾU THAM KHẢO Ý KIẾN GIÁO VIÊN
VỀ THỰC NGHIỆM SƯ PHẠM

Tiêu chuẩn đánh gia	Mức đánh giá (50 GV)			
	Không tán thành A	**Ít tán thành B**	**Tán thành C**	**Rất tán thành D**
Giáo án				
Giáo án dễ thực hiện	0	8	37	5
Giáo án có nhiều tính mới về PPDH	0	10	31	9
Giáo án rất hiệu quả	0	0	50	0
Giáo án có nhiều hoạt động tốt	0	0	50	0
Giáo viên (GV) trên lớp				
GV rất vững kiến thức Toán	0	0	47	3
GV có PP tiếp cận vấn đề tốt	0	0	50	0
GV rất có PP hướng dẫn HS GQVĐ	0	0	47	3
GV rất có PP lôi cuốn HS	0	0	47	3
HS (HS) trên lớp				
HS tích cực tham gia xây dựng bài	0	10	28	12
HS hiểu bài tốt	0	0	38	12
HS làm bài tốt	0	6	42	2
HS rất thích thú với bài học	0	0	50	0

PHIẾU THAM KHẢO Ý KIẾN HS
VỀ GIỜ THỰC NGHIỆM SƯ PHẠM

Xin các em cho biết ý kiến bằng cách khoanh tròn vào phương án chọn

Tiêu chuẩn đánh gia	**Mức đánh giá (150 HS)**			
	Không tán thành A	**Ít tán thành B**	**Tán thành C**	**Rất tán thành D**
Về thầy, cô giáo (trên lớp)				
Thầy, cô giảng bài rất thuyết phục	A	B	C	D
Thầy, cô có PP tiếp cận vấn đề tốt	A	B	C	D
Thầy, cô rất biết hướng dẫn HS GQVĐ	A	B	C	D
Thầy, cô rất biết PP lôi cuốn HS	A	B	C	D
Thầy, cô giảng bài dễ hiểu	A	B	C	D
Về việc học của em trên lớp				
Em rất thích thú với bài học hôm nay	A	B	C	D
Em rất hiểu bài học hôm nay	A	B	C	D
Em rất biết cách làm toán ở bài hôm nay	A	B	C	D
Em thích cách dạy bài hôm nay của thầy cô	A	B	C	D
Các bạn em rất thích bài học hôm nay	A	B	C	D

THỐNG KÊ KẾT QUẢ PHIẾU THAM KHẢO Ý KIẾN HS VỀ GIỜ THỰC NGHIỆM SƯ PHẠM

Tiêu chuẩn đánh gia	Mức đánh giá (150 HS)			
	Không tán thành A	Ít tán thành B	Tán thành C	Rất tán thành D
Về thầy, cô giáo (trên lớp)				
Thầy, cô giảng bài rất thuyết phục	0	2	134	14
Thầy, cô có PP tiếp cận vấn đề tốt	0	0	150	0
Thầy, cô rất biết hướng dẫn HS GQVĐ	0	2	129	19
Thầy, cô rất biết PP lôi cuốn HS	0	4	146	0
Thầy, cô giảng bài dễ hiểu	0	0	146	0
Về việc học của em trên lớp				
Em rất thích thú với bài học hôm nay	0	0	8	142
Em rất hiểu bài học hôm nay	0	0	8	142
Em rất biết cách làm toán ở bài hôm nay	0	15	122	13
Em thích cách dạy bài hôm nay của thầy cô	0	0	150	0
Các bạn em rất thích bài học hôm nay	0	0	150	0

3.3.3.2. Đánh giá định tính qua phiếu hỏi giáo viên dự giờ TNSP

Sau giờ TNSP, chúng tôi tiến hành gửi phiếu hỏi tới 50 GV và 150 HS, chúng tôi thu được một số kết quả sau đây:

* Về phía HS:

- Hầu hết HS (83%) đều cho rằng những tri thức toán học trình bày trong sách giáo khoa không dễ dàng có thể hiểu được. Song, nếu trong giờ dạy các thầy

cô sử dụng hoặc hướng dẫn sử dụng CNTT, cụ thể hơn là sử dụng phần mềm hình học động sẽ làm cho giờ học hấp dẫn hơn; các em đều hào hứng và thích thú học tập hơn (89%).

- Ở các tiết TNSP, có tới 66% số HS tự đánh giá là hiểu bài hơn, thấy rõ hơn ý nghĩa thực tiễn của các kiến thức HHKG. Các em có nguyện vọng được GV thay đổi PPDH, tăng cường hơn nữa việc sử dụng CNTT trong các giờ học.
- Các em ở lớp TNSP cho rằng các em có khả năng và kĩ năng giải toán tốt hơn so với các giờ học khác không có CNTT.

* Về phía GV:

- Hầu hết (92%) các thầy cô giáo dự giờ TNSP đánh giá cao các tiết học thực nghiệm sư phạm vì nó đem lại sự hứng thú học tập cho HS; giờ dạy sinh động hơn, các hoạt động của thầy và trò trong giờ học hợp lí, ăn khớp với nhau.
- Sau giờ dạy TNSP, các thầy cô (100%) cho rằng HS hiểu bài, nắm bài tốt hơn, khả năng và kĩ năng giải toán sẽ tốt hơn HS ở các lớp dạy thông thường.
- Có tới 87% các thầy cô đồng tình với giáo án TNSP vì tính khả thi và hiệu quả của nó, thậm chí nhiều thầy cô rất thích các giáo án đó. Theo cách dạy trong giáo án TNSP, HS sẽ thấy được ý nghĩa thực tiễn của các kiến thức Hình học.
- Nhiều thầy cô muốn thay đổi PPDH HHKG như các giờ TNSP, vì theo cách dạy đó, HS lớp TNSP hứng thú tham gia xây dựng bài hơn, hiểu bài hơn và khả năng giải toán về chủ đề này sẽ tốt hơn.

3.3.3.3. *Những nhận xét rút ra từ kết quả điều tra từ phiếu xin ý kiến giáo viên về các biện pháp đề xuất trong chương 2 luận án*

Kết quả thống kê kết quả tham khảo ý kiến từ 102 GV về các biện pháp sử dụng CNTT trong DH HHKG ở trường THPT (xem phụ lục 4) cho thấy:

+ Về tính mới của các biện pháp đối với bản thân: Các biện pháp 1 và 2 không hoàn toàn mới đối với đa số GV được hỏi, tuy nhiên các biện pháp 3 và 4 đều được tất cả các GV cho rằng khá mới hoặc rất mới (100%);

+ Về tính khả thi và hiệu quả của các biện pháp: Các biện pháp 1, 2 và 4 đều được các GV cho rằng có tính khả thi và hiệu quả. Riêng biện pháp 3 chỉ có 4/102 (xấp xỉ 4% số GV cho rằng có tính khả thi tốt).

+ Về tác dụng của các biện pháp đối với bản thân: Tất cả GV được hỏi đều cho rằng các biện pháp có tác dụng đối với bản thân; riêng biện pháp 1 và 2 ít có tác dụng đối với HS (2%).

3.4. Kết luận chương 3

Sau khi gặp gỡ, trao đổi về các biện pháp ở chương 2 luận án với 50 giáo viên Toán của sáu tổ Toán thuộc sáu trường THPT để xin ý kiến góp ý, đánh giá cho các biện pháp đã đề xuất, chúng tôi đã thu được kết quả tương đối khả quan: Hầu hết các giáo viên được hỏi đều cho rằng các biện pháp đã đề xuất có tính mới đối với bản thân họ và có tính khả thi, hiệu quả.

Kết quả thực nghiệm sư phạm hai giáo án (có đối chứng), tại bốn trường THPT, thuộc các vùng miền khác nhau, với hai tiết ở lớp 12 và hai tiết ở lớp 11, cho thấy: HS lớp thực nghiệm sư phạm hứng thú hơn trong học tập, các em hiểu bài hơn và thấy rõ hơn ý nghĩa của kiến thức Hình học trong một số tình huống thực tiễn. Các giờ thực nghiệm sư phạm diễn ra trong không khí lớp học hào hứng, sôi nổi của HS, vì các em được lôi cuốn vào những tình huống hoạt động, tìm tòi, khám phá; các em được suy nghĩ và thảo luận nhiều hơn.

Kết quả học tập của các lớp thực nghiệm cao hơn lớp đối chứng một cách thực chất theo nghĩa thống kê, kiểm định giả thuyết. HS lớp TNSP thể hiện được độ bền vững, sâu sắc của kiến thức hơn so với HS lớp đối chứng.

Kết quả nghiên cứu trường hợp của chúng tôi một lần nữa củng có thêm niềm tin vào tính đúng đắn của những biện pháp đã đề xuất.

Kết quả TNSP đã cho thấy các biện pháp được đề xuất ở chương 2 và các giáo án TNSP có tính hiệu khả thi và hiệu quả.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

Kết luận

Luận án có những đóng góp chủ yếu sau đây:

Về lí luận:

- Tổng quan về những công trình nghiên cứu ở trong và ngoài nước về sử dụng CNTT nói chung, sử dụng phần mềm nói riêng trong dạy học môn Toán ở trường phổ thông; Làm rõ thêm những tác dụng mạnh mẽ của CNTT trong dạy học môn Toán. Tuy đã có không ít những kết quả nghiên cứu, song vẫn cần có những kết quả nghiên cứu mới nhằm mở rộng, bổ sung hơn nữa cho lí luận và những nghiên cứu vận dụng lí luận vào thực tiễn muôn màu sắc của giáo dục trong thời đại mới.
- Trên cơ sở nghiên cứu, khai thác các tính năng, tác dụng của những phần mềm hỗ trợ dạy học và nghiên cứu những tình huống dạy học Hình học trong chương trình môn Toán THPT, chúng tôi đã đề xuất một số biện pháp sử dụng phần mềm hình học động vào dạy học Hình học không gian ở trường THPT, nhằm góp phần tạo ra hiệu quả dạy và học.

Biện pháp 1. Sử dụng phần mềm hình học động để vẽ hình, hoặc tạo ra mô hình trực quan, mô hình phỏng thực tiễn giúp HS hiểu bài giảng.

Biện pháp 2. Sử dụng phần mềm hình học động hỗ trợ giải toán quỹ tích hoặc hỗ trợ phát hiện yếu tố bất biến, yếu tố cần tìm trong bài toán Hình học không gian.

Biện pháp 3. Sử dụng phần mềm hình học động hỗ trợ kiểm nghiệm các phán đoán và tìm kiếm trong dạy học giải toán Hình học không gian.

Biện pháp 4. Sử dụng phần mềm hình học động hỗ trợ dạy học giải bài toán Hình học không gian bằng thủ pháp “trải hình”.

Những biện pháp này giúp cho giờ học hấp dẫn hơn, ý nghĩa hơn và góp phân đổi mới phương pháp dạy học, nâng cao hiệu quả dạy học Hình học không gian.

Về thực tiễn:

- Làm rõ một phần thực trạng việc sử dụng CNTT trong các giờ dạy Hình học ở trường THPT; đồng thời đề xuất một số tình huống dạy học Hình học ở trường THPT, trong đó trình bày rõ các hoạt động của thầy và trò trong quá trình dạy học với sự hỗ trợ của CNTT, góp phần nâng cao chất lượng dạy học Hình học không gian ở trường THPT.
- Kết quả thực nghiệm sư phạm tại bốn trường THPT thuộc những tỉnh, thành phố, vùng miền khác nhau, phần nào đã minh chứng cho tính khả thi và hiệu quả của các biện pháp đã đề xuất.
- Luận án có thể là một tài liệu tham khảo bổ ích cho các đồng nghiệp, các giáo viên Toán ở các trường THPT, các bạn sinh viên tại các cơ sở đào tạo giáo viên Toán.

Những kết quả có được về lí luận và thực tiễn cho phép kết luận: Mục đích nghiên cứu của luận án đã đạt được, giả thuyết khoa học của luận án chấp nhận được.

Một số kết quả của luận án đã được viết thành 08 bài báo đăng tải trên một số tạp chí chuyên ngành và báo cáo tại một số hội nghị khoa học trong nước.

Kiến nghị

Trong các giờ học cần tăng cường cho HS các hoạt động trải nghiệm, thực hành sử dụng một số phần mềm để hỗ trợ học tập. Qua đó các em có thể khám phá các tính chất của các hình, khối không gian, từ đó các em có hứng thú hơn và góp phần nâng cao dần hiệu quả trong học tập. Muốn vậy nhà trường cần có sự một cơ sở vật chất và trang thiết bị về công nghệ thông tin ngày càng tốt hơn, đồng thời đòi hỏi ở các thầy, cô giáo sự say mê khám phá, tìm tòi, ứng dụng công nghệ thông tin vào thực tiễn dạy học của mình.

CÁC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN ĐÃ ĐƯỢC CÔNG BỐ

1. Nguyễn Văn Thái Bình và Bùi Minh Đức (2013), *Sử dụng phiếu học tập động trong dạy học giải bài tập hình học lớp 11 theo bốn bước của Polya,* Tạp chí khoa học, Trường ĐHSP Hà Nội, số Đặc biệt, tập 58, tr.36-40.

2. Bùi Minh Đức và Nguyễn Thị Thu Hồng (2013), *Sử dụng phần mềm Geometrer's Sketchpad trong dạy học phép biến hình lớp 11 THPT*, Tạp chí khoa học, Trường ĐHSP Hà Nội, số Đặc biệt, tập 58, tr.85-89.

3. Tran Trung, Nguyen Ngoc Giang, Bui Minh Đuc, Phan Anh Hung (2014), *Discovery Learning with the Help of the GeoGebra Dynamic Geometry Software*, international Journal of Learning, Teaching and Educational Research Vol. 7, No. 1, Pp. 44-57.

4. Bùi Minh Đức và Vũ Hữu Tuyên (2014), *Dạy học Hình Học liên hệ với thực tiễn kết hợp sử dụng phần mềm vẽ hình,* Tạp chí khoa học, Trường Đại học Sư Phạm Hà Nội, ISSN 0868-3719 Volume 59, Number 2A/2014

5. Vũ Hữu Tuyên và Bùi Minh Đức (2014), *Phát triển năng lực vận dụng hình học vào thực tiễn cho học sinh,* Tạp chí khoa học ISSN 0868-3719 Volume 59, Number 2A/2014 Trường Đại học Sư Phạm Hà Nội

6. Vũ Hữu Tuyên và Bùi Minh Đức (2015): *Khai thác ý nghĩa thực tiễn của một số tri thức về mặt trụ (Hình học 12),* Tạp chí Giáo dục số 367 kì 1T10/2015.

7. Bùi Minh Đức (2017), *Sử dụng phần mềm GeoGebra hỗ trợ dạy học giải bài toán Hình học không gian bằng thủ pháp trải hình,* Tạp chí Giáo dục, số đặc biệt, tháng 3 năm 2017

8. Bùi Minh Đức (2017), *Hướng dẫn học sinh sử dụng phần mềm GeoGebra hỗ trợ kiểm nghiệm các dự đoán và khám phá trong giải toán hình học không gian ở trường Trung học phổ thông*, Tạp chí Khoa học Giáo dục, Số 142, Trang 83 - 86

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

[1]. Đỗ Thị Hồng Anh (1993), *Xây dựng và sử dụng một phần mềm dạy học tiếp cận các phương pháp của trí tuệ nhân tạo để trợ giúp dạy học giải Toán về hệ thức lượng trong tam giác*, Luận án Tiến sĩ KHGD tại trường ĐHSP Hà Nội.

[2]. Hoàng Ngọc Anh (2010), *Sử dụng đa phương tiện trong dạy học phương pháp dạy học Toán ở trường ĐHSP*, Luận án Tiến sĩ KHGD tại trường ĐHSP Hà Nội.

[3]. Hoàng Thị Quỳnh Anh (2006), *Ứng dụng máy tính vào dạy học Đại số tuyến tính nhằm tích cực hóa hoạt động nhận thức cho sinh viên Cao đẳng sư phạm*, Luận án Tiến sĩ KHGD tại trường ĐH Vinh.

[4]. Nguyễn Sĩ Đức (2002), *Xây dựng và sử dụng phần mềm dạy học hỗ trợ luyện tập môn Toán ở trường Tiểu học*, Luận án Tiến sĩ KHGD tại trường ĐHSP Hà Nội.

[5]. Lâm Quang Đông (2014), *Từ điển Oxford Anh - Việt*, NXB ĐHQG Hà Nội.

[6]. Trịnh Thanh Hải (2000), *Hỗ trợ việc dạy hình học lớp 10 bằng bài tập thông qua lập trình PASCAL*, Tạp chí Nghiên cứu giáo dục, số 8.

[7]. Trịnh Thanh Hải (2006), *Sử dụng phần mềm hình học động để dạy một số nội dung hình học lớp 10*, Tạp chí Giáo dục, số đặc san 7/2006.

[8]. Trịnh Thanh Hải (2006), *Ứng dụng công nghệ thông tin vào dạy học hình học lớp 7 theo hướng tích cực hóa hoạt động học tập của HS*, Luận án Tiến sĩ KHGD tại trường ĐHSP Hà Nội.

[9]. Trịnh Thanh Hải (Chủ biên, 2005), *Sử dụng Công nghệ Thông tin và truyền thông (ICT) trong dạy học môn Toán*, NXB Hà Nội.

[10]. Trịnh Thanh Hải và Trần Việt Cường (2006), *Sử dụng phần mềm Geospacw trong dạy học hình học không gian theo hướng phát hiện và giải quyết vấn đề*, Tạp chí Giáo dục, số 149.

[11]. Hamid Chaachoua (2013), *Tích hợp công nghệ thông tin và truyền thông trong dạy học toán*, Hội thảo quốc tế Pháp – Việt về Didactic Toán, tp Hồ Chí Minh.

[12]. Trần Văn Hạo (Tổng chủ biên, 2006), *Sách giáo khoa Hình học 10*, NXB Giáo dục.

[13]. Trần Văn Hạo (Tổng chủ biên, 2006), *Sách giáo khoa Hình học 11*, NXB Giáo dục.

[14]. Trần Văn Hạo (Tổng chủ biên, 2006), *Sách giáo khoa Hình học 12*, NXB Giáo dục.

[15]. Bùi Hiển (Chủ biên, 2001), *Từ điển giáo dục*, NXB Từ điển Bách khoa.

[16]. Nguyễn Văn Hộ và Hà Thị Đức (2008), *Giáo dục học đại cương*, NXB Giáo dục.

[17]. Nguyễn Bá Kim (2000), *Phát triển và sử dụng công nghệ dạy học*, Hội thảo về phát triển và sử dụng công nghệ dạy học trong đào tạo và bồi dưỡng giáo viên, ĐHSP Hà Nội.

[18]. Nguyễn Bá Kim (Chủ biên, 1992), Vũ Dương Thụy, *Phương pháp dạy học môn Toán*, NXB Giáo dục.

[19]. Nguyễn Bá Kim và Đào Thái Lai (1998), *Môi trường tin học và giáo dục Toán học*, Báo cáo KH tại Hội nghị quốc gia kỷ niệm 20 Công nghệ Giáo dục, tháng 4/1998.

[20]. Nguyễn Bá Kim, Đào Thái Lai, Trịnh Thanh Hải (2004), *Sử dụng phần mềm Cabri Geometry hỗ trợ dạy học quỹ tích*, Tạp chí Giáo dục số 77.

[21]. Nguyễn Bá Kim, Đào Thái Lai, Trịnh Thanh Hải (2008), *Dạy học Hình học với sự hỗ trợ của phần mềm Cabri Geometry*, NXB ĐHSP.

[22]. Nguyễn Bá Kim (2015), *Phương pháp dạy học môn Toán*, NXB ĐHSP.

[23]. Ngô Thúc Lanh, Đoàn Quỳnh, Nguyễn Đình Trí (2000), Từ điểm Toán học, NXB Giáo dục.

[24]. Đào Thái Lai (2003), *Ứng dụng CNTT giúp HS tự khám phá và giải quyết vấn đề trong học toán ở trường phổ thông*, Tạp chí GD, số 5.

[25]. Đào Thái Lai (2000), *Thiết kế phần mềm dạy học multimedia, Báo cáo tại hội thảo về phát triển và sử dụng công nghệ dạy học trong đào tạo và bồi dưỡng giáo viên*, ĐHSP Hà Nội.

[26]. Đào Thái Lai (2002), *Ứng dụng CNTT và những vấn đề cần xem xét đổi mới trong hệ thống PPDH môn Toán*, Tạp chí GD, số 9.

[27]. Đào Thái Lai (2006), *Ứng dụng công nghệ thông tin trong dạy học ở các trường phổ thông Việt Nam*, Đề án trọng điểm cấp bộ, Mã số B2003-49-42-TĐ.

[28]. Ouk Chieng (1989), *Xác định con đường đưa một số yếu tố tin học vào nhà trường Campuchia*, Luận án Tiến sĩ KHGD tại trường ĐHSP Hà Nội.

[29]. Hoàng Phê (1996; 2004), *Từ điển tiếng Việt*, NXB Đà Nẵng.

[30]. Nguyễn Đạo Phương - Phan Huy Khải (1994), *Tuyển chọn các bài toán về ba đường cônic*, NXB Giáo dục.

[31]. Nguyễn Lan Phương (2001), *Xây dựng phần mềm hỗ trợ HS học tập trên trang web*, Tạp chí Giáo dục, số 4, 2001.

[32]. Polya G. (1975), *Giải bài toán như thế nào*, (Hoàng Chúng - Lê Đình Phi - Nguyễn Hữu Chương dịch), NXB Giáo dục.

[33]. Polya G. (2010), *Toán học và những suy luận có lí*, (Hà Sỹ Hồ, Hoàng Chúng, Lê Đình Phi, Nguyễn Hữu Chương, Hồ Thuần dịch). NXB Giáo dục.

[34]. Đoàn Quỳnh (Tổng Chủ biên, Văn Như Cương (Chủ biên), Phạm Khắc Ban và Tạ Mân (2007), *Hình học 11 nâng cao*, NXB Giáo dục.

[35]. Đoàn Quỳnh (Tổng chủ biên, 2006), *Bài tập Hình học 10 nâng cao*, NXB Giáo dục.

[36]. Đoàn Quỳnh (Tổng chủ biên, 2006), *Bài tập Hình học 11 nâng cao*, NXB Giáo dục.

[37]. Đoàn Quỳnh (Tổng chủ biên, 2006), *Bài tập Hình học 12 nâng cao*, NXB Giáo dục.

[38]. Đoàn Quỳnh (Tổng chủ biên, 2006), *Hình học 10 nâng cao*, NXB Giáo dục.

[39]. Đoàn Quỳnh (Tổng chủ biên, 2006), *Hình học 11 nâng cao*, NXB Giáo dục.

[40]. Đoàn Quỳnh (Tổng chủ biên, 2006), *Hình học 12 nâng cao*, NXB Giáo dục.

[41]. Lê Khắc Thành (1993), *Tiếp cận hoạt động nhiều mặt trong dạy học lập trình ở nhà trường THPT*, Luận án Tiến sĩ KHGD tại trường ĐHSP Hà Nội.

[42]. Nguyễn Chí Thành (2008), *Nghiên cứu didactic về việc giảng dạy các yếu tố thuật toán và lập trình trong dạy học Toán bậc trung học với sự giúp đỡ của máy tính bỏ túi*, Luận án Tiến sĩ KHGD tại trường ĐHSP Hà Nội.

[43]. Trần Trung (2008), *Nghiên cứu ứng dụng e-learning trong dạy học ở các trường dự bị đại học dân tộc*, Tạp chí GD, số 200, 26-29.

[44]. Trần Trung (2008), *Thiết kế bài giảng điện tử theo quan điểm DH chương trình hóa*, Tạp chí GD, số tháng 11/2008, 8-14.

[45]. Trần Trung và Đỗ Hồng Thuận (2008), *Khai thác phần mềm cabri 3D trong dạy học Hình học ở các trường dự bị đại học dân tộc*, Tạp chí GD, số 9/2008, 21-23.

[46]. Trần Trung, Đặng Xuân Cương, Nguyễn Văn Hồng, Nguyễn Danh Nam (2011), *Ứng dụng công nghệ thông tin vào dạy học môn toán ở trường phổ thông*, NXB Giáo dục.

[47]. Trần Vui (2007), *Khám phá Hình học 10 với The Geometer's Sketchpad*, NXB Giáo dục.

[48]. Trần Vui (2008), *Khám phá Hình học 11 với The Geometer's Sketchpad*, NXB Giáo dục.

[49]. Trần Vui (2009), *Khám phá Hình học 12 với The Geometer's Sketchpad*, NXB Giáo dục.

Tiếng Anh

[50]. Aija Cunska and Inga Savicka (2012), *Use of ICT Teaching-Learning Methods make School Math Blossom*, International Education and Cross-Cultural Communication, Problems and Solutions, IECC 2015, 9-11 June 2015, Tomsk, Russia, Pp. 1485.

[51]. Le Tuan Anh (2015), *Developing Vietnamese pre-service high school mathematics teachers' skills of using Geogebra*, Geogebra International Journal of Romania, ISSN: 2247-7241 (e-Journal), ISSN: 2068-3227 (Printed journal), Vol. 4, No. 1, Pp. 31-38.

[52]. Le Tuan Anh (2015), *Geogebra as a part of undergraduate and postgraduate courses in the Faculty of Mathematics and Informatics of Hanoi National University of Education*, Geogebra International Journal of Romania, ISSN: 2247-7241 (e-Journal), ISSN: 2068-3227 (Printed journal), Vol. 4, No. 2, 65-69.

[53]. Arnheim, Rudolf (1969), *Visual Thinking*, University of California Press. ISBN 0520018710.

[54]. Bailey J. (2007), *Mathematical investigations: A primary teacher educators narrative journey of professional awareness*. Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia: MERGA (Vol 1, 103-112).

[55]. Barnes J. (1997), *Modeling dynamical systems with spreadsheet software*, Mathematics and Computer Education, 31(1), 43-55.

[56]. Barron A. (1998), *Designing Web-based training*, British Journal of Educational Technology, Vol. 29, No. (4), Pp; 355-371.

[57]. Berge Z. (1998), *Guiding principles in Web-based instructional design*, Education Media International, Vol. 35No.(2), Pp;72-76.

[58]. Battista M. (2001), *Applying Cognition-Based Assessment to Elementary School Students' Development of Understanding of Area and Volume Measurement*, Mathematical Thinking and Learning, 6(2), 185–204.

[59]. Bidarian S. , Davoudi A. M. (2011), *A Model for application of ICT in the process of teaching and learning*, International Conference on Education and Educational Psychology (ICEEPSY). Procedia - Social and Behavioral Sciences 29 (2011) 1032 – 1041.

[60]. Brown T. H. (2005), *Towards a model for m-Learning in Africa*, International Journal on E-Learning, 4(3): 299-316.

[61]. Bruner J.S. (1974), *Learning Through Experience and Learning Through Media*. In: Olso, Media and Symbols. The 73rd Yearbook of the NSSE, I, ChiKago, Pp 120 – 150.

[62]. Daniels J. S. (2002), *"Foreword" in Information and Communication Technology in Education*, A Curriculum for Schools and Programme for Teacher Development. Paris:UNESCO.

[63]. Daintith, John (2009), "*IT"*, A Dictionary of Physics, Oxford University Press, retrieved 1 August 2012 (subscription required)

[64]. Drijvers P. , Lynda Ball, Bärbel Barzel M. , Kathleen Heid Yiming Cao, Michela Maschietto (2016), *Uses of Technology in Lower Secondary Mathematics*,A concise Topical Servey,Springer.

[65]. Drijvers P. , Doorman M. , Boon P. , Reed H. and Gravemeijer K. (2010), *The teacher and the tool: Instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom,* Educational Studies in Mathematics, 75(2), Pp. 213–234.

[66]. Erhan Selcuk Haciomeroglu, Lingguo Bu, Robert C. Schoen, Markus Hohenwarter (2009). *Learning to Develop Mathematics Lessons with GeoGebra*. MSOR Connections Vol 9 No 2 May – July 2009.

[67]. Fuchs T. and Woessmann L. (2004), *Computers & student learning: Bivariate and multivariate evidence on the availability and use of computers at home and at school*, CESifo Working, Pp 1321.

[68]. Garrison D. R. , Anderson T. (2003), *E-learning in the 21st century: A framework for research and practice*, London: Routledge/Falmer.

[69]. Guin D. and Trouche L. (1999), *The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators*, International Journal of Computers for Mathematical Learning, 3, 195–227.

[70]. Gardner, H., & Hatch, T. (1989). Multiple intelligences go to school: Educational implications of the theory of multiple intelligences. *Educational Researcher*, *18*(8), 4-9.

[71]. *Hamilton C. R. (1998), Paths in the brain, actions of the mind: Special issue in honor of Roger W. Sperry, Neuropsychologia. 36 (10): 953–954.* PMID 9845044

[72]. Hannafin R., Burruss J. and Little C. (2001), *Learning with dynamic geometry programs: Perspectives of teachers and learners*, *The Journal of Educational Research*, *94*(3), Pp. 132-144.

[73]. Healy L. and Hoyles C. (2001), *Software tools for geometrical problem solving: Potentials and pitfalls*, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *6*, Pp. 235-256.

[74]. Herceg Dj., Herceg D. (2007), *Numerics with GeoGebra in high school, First Central- and Eastern European Conference on Computer Algebra- and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Education*, University of Pécs, Pollack Mihály Faculty of Engineering, Hungary.

[75]. Higginson W. (2002). *Teaching with rich learning tasks: A handbook*, Australian Association of Mathematics Teachers, Adelaide.

[76]. Hirtz S. , Harper D.G. and Mackenzie S. (2008), *Education for a Digital World: Advice, Guidelines, and Effective Practice from Around the Globe. Vancouver: Commonwealth of Learning*, ISSN: 2068-3227 (Printed journal), Vol. 4, No. 1, 51-58

[77]. Hohenwarter M., Hohenwarter J., Kreis, Y. and Lavicza Z. (2008), *Teaching and learning calculus with free dynamic mathematics software GeoGebra*, Research and development in the teaching and learning of calculus ICME 11, Monterrey, Mexico

[78]. Hohenwarter M.; Preiner J. (2007): *Dynamic Mathematics with GeoGebra*, Journal for Online Mathematics and its Applications, Volume 7, Article ID 1448.

[79]. Jackiw N. (1995), *The geometer's sketchpad [Computer software]*, Berkeley, CA: Key Curriculum Press.

[80]. Jaensch E.R. (1930), *Eidetic Imagery*, London: Kegan Paul.

[81]. Kozma R. (2005), *National Policies That Connect ICT-Based Education Reform To Economic And Social Development*, Human Technology Vol.1, No. (2), Pp. 117-156

[82]. Kozma R. (2005), *National Policies That Connect ICT-Based Education Reform To Economic And Social Development*, Human Technology Vol.1, No. (2), Pp. 117-156

[83]. Kulik J. A. (2003), *Effects of using instructional technology in elementary and secondary schools: What controlled evaluation studies say*. SRI Project Number P10446.001. Arlington, VA: SRI International.

[84]. Kulik, James A. (1994), *Meta-Analytic Studies of Findings on Computer-Based Instruction*, In Eva L. Baker and Harold F. O'Neil, Jr., eds., Technology Assessment in Education and Training, pp. 9-33. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

[85]. Leong Y. H. (2009), *Use of ICT in mathematics education in Singapore: Review of research*, In W. K. Yoong, L. P. Yee, B. Kaur, F. P. Yee, & N. S. Fong (Eds.), Mathematics education: The Singapore journey. Singapore: World Scientific.

[86]. Lee T. L. (2008), HOM4PS-2.0: A sofware package, Computing 83 (2)

[87]. Linda Kreger Silverman (2005), *Upside-Down Brilliance: The Visual-Spatial Learner*, The Institute for the Study of Advanced Development Gifted Development Center/Visual-Spatial Resource

[88]. Michel Deza, *Elena Deza (2009), Encyclopedia of Distances, Springer*.

[89]. Müller, Falcke D. (2006), *The Impact of ICT on Small Enterprises: The Case of Small-Scale Industry in India*. In: Torero, M. and von Braun, J (eds.): Information and Communication Technologies

for Development and Poverty Reduction - The Potential of Telecommunications. Baltimore, Pp.174-178.

[90]. Nguyen Danh Nam (2012), *Understanding the development of the proving process – Suggestions for teaching proofs within a dynamic geometry environment*, Verlag Dr. Kovač, Hamburg, Germany

[91]. Nguyễn Danh Nam (2012), *GeoGebra with an interactive help system generates abductive argumentation during the proving process*, North American GeoGebra Journal, Pp. 01-05.

[92]. OECD (2015), *Students, computers and learning. making the connection*. Paris: OECD Publishing.

[93]. Polya G. (1954), *Induction and analogy in mathematics*, volume 1, Princeton University Press, 142-147.

[94]. Ronau R. N. , Rakes C. R. , Bush S. B. , Driskell S. O., Niess M. L. and Pugalee D. K. (2014), *A survey of mathematics education technology dissertation scope and quality: 1968–2009*, American Educational Research Journal, 51(5), Pp. 974–1006.

[95]. Sinclair N. and Yurita V. (2008), *To be or to become: How dynamic geometry changes discourse*, Research in Mathematics Education, 10(2), Pp. 135–150.

[96]. Terri L. (1999), *A Taxonomy of Software for Mathematics Instruction*, CITE (contemporary issues in technology and teacher education) Journal

[97]. Tran Trung, Nguyễn Ngọc Giang, Bùi Minh Đức, Phan Anh Hưng (2014), *Discovery Learning with the Help of the GeoGebra Dynamic Geometry Software*, international Journal of Learning, Teaching and Educational Research Vol. 7, No. 1, Pp. 44-57.

[98]. Trouche L. (2004), *Managing complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students'*

command process through instrumental orchestra- tions, International Journal of Computers for Mathematical Learning, 9, 281–307.

[99]. Toure K. (2009), *Appropriating technologies and making them work for you in teaching and learning: depth is essential*. In T. Karsenti (Ed.), Pedagogical Use of ICT: Teaching and Reflecting Strategies (pp. 94-110). Ottawa: IDRC.

[100]. Valasidou A., Sidiropoulos D., Hatzis T., Bousiou-Makridou D. (2005), *Guidelines for the Design and Implementation of E-Learning Programmes, Proceedings of the IADIS,* International Conference IADIS E-Society 2005, 27 June- 30 June, Qawra, Malta

[101]. Tran Vui (1996), *Application of computer assisted materials in teaching differential and integral calculus in upper secondary school*, Classroom Teacher, Jilid I, Bil 1, Mac 1996, Malaysia.

[102]. Tran Vui (1996), *Using Sines and Cosine, Classroom Teacher*, Jilid I, Bil 2, September 1996, Malaysia.

[103]. Tran Vui (2002), *Investigating Geometry with the Geometer's Sketchpad – a conjecturing Approach*, Malaysia.

[104]. Yerushalmy M. and Botzer G. (2011). *Teaching secondary mathematics in the mobile age*. In O. Zaslavsky & P. Sullivan (Eds.), Constructing knowledge for teaching secondary mathematics tasks to enhance prospective and practicing teacher learning (pp. 191–208). New York: Springer.

[105]. Wang Q. , Woo H. L. (2007), *Systematic Planning for ICT Integration in Topic Learning*, Educational Technology & Society, 10(1): 148-156.

[106]. Wagner A. D. (2001), *IT and Education for the Poorest of the Poor: Constraints, Possibilities, and Principles*. TechKnowLogia, July/August, Pp. 48-50

[107]. Ware, Colin (2008), *Visual thinking for design Burlington*, Mass: Morgan Kaufmann.

[108]. Webb M. , Cox M. (2004), *A review of pedagogy related to information and communications technology*, Technology, Pedagogy and Education, Vol. 13 No. (3), Pp; 235–286.

[109]. William J. and Goos M. (2013), *Modelling with mathematics and technology*, In A. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. Leung (Eds.), Third international handbook of mathematics education (pp. 549–569). Berlin: Springer.

[110]. Woo Y. and Reeves T. C. (2006), *Meaningful online learning: Exploring interaction in a web-based learning environment using authentic tasks. Unpublished Dissertation*, University of Georgia, Athens, GA.

[111]. http://www.unesco.org/education/educprog/lwf/dl/edCNTT.pdf

PHỤ LỤC 1. PHIẾU XIN Ý KIẾN

Để khai thác các hoạt động trí tuệ nhằm rèn luyện cho học sinh, xin anh/ chị vui lòng cho biết ý kiến về các câu hỏi sau, bằng cách tích vào ô trống phương án phù hợp:

Câu 1. Trong mặt phẳng cho hai điểm *A, B* và đường thẳng *d*; đoạn *AB* không cắt *d*. Tìm điểm *C* thuộc *d* sao cho tổng *AC* + *BC* nhỏ nhất.

Anh chị đã biết lời giải bài toán này hay chưa?

Nếu đã biết ☐ Xin viết vắt tắt chứng minh ở tờ giấy kèm theo.

Nếu chưa biết ☐ Xin cho dự đoán về điểm C:……..……

…….

Câu 2. Trong mặt phẳng cho hai điểm *A, B* và đường thẳng *d;* đoạn *AB* không cắt *d*. Tìm điểm *C* thuộc *d* sao cho góc *ACB* lớn nhất.

Anh chị đã biết lời giải bài toán này hay chưa?

Nếu đã biết ☐ Xin viết vắt tắt chứng minh ở tờ giấy kèm theo.

Nếu chưa biết ☐ Xin cho dự đoán về điểm *C*:……..…...……

…….

Câu 3. Trong mặt phẳng cho hai điểm *A, B* và đường tròn (*T*); (*T*) thuộc một nửa mặt phẳng bờ *AB*. Tìm điểm *C* thuộc (*T*) sao cho góc *ACB* lớn nhất.

Anh chị đã biết lời giải bài toán này hay chưa?

Nếu đã biết ☐ Xin viết vắt tắt chứng minh ở tờ giấy kèm theo.

Nếu chưa biết ☐ Xin cho dự đoán về điểm C:……..……

…….

Câu 4. Trong mặt phẳng cho hai điểm *A, B* và đường tròn (*T*); (*T*) thuộc một nửa mặt phẳng bờ *AB*. Tìm điểm *C* thuộc (*T*) sao cho tổng *AC* + *CB* nhỏ nhất.

Anh chị đã biết lời giải bài toán này hay chưa?

Nếu đã biết ☐ Xin viết vắt tắt chứng minh ở tờ giấy kèm theo.

Nếu chưa biết ☐ Xin cho dự đoán về điểm C:……..……

Câu 5. Trong không gian cho hai điểm *A, B* và mặt phẳng (*P*); đoạn *AB* không cắt (*P*). Tìm điểm *C* thuộc (*P*) sao cho tổng *AC* + *BC* nhỏ nhất.

Anh chị đã biết lời giải bài toán này hay chưa?

Nếu đã biết ☐ Xin viết vắt tắt chứng minh ở tờ giấy kèm theo.

Nếu chưa biết ☐ Xin cho dự đoán về điểm *C*:…….……

Câu 6. Trong không gian cho hai điểm *A, B* và mặt phẳng (*P*); đoạn *AB* không cắt (*P*). Tìm điểm *C* thuộc *d* sao cho góc *ACB* lớn nhất.

Anh chị đã biết lời giải bài toán này hay chưa?

Nếu đã biết ☐ Xin viết vắt tắt chứng minh ở tờ giấy kèm theo.

Nếu chưa biết ☐ Xin cho dự đoán về điểm *C*:…….……

Câu 7. Trong không gian cho hai điểm *A, B* và mặt cầu (*T);* đoạn *AB* ở ngoài mặt cầu (*T)*. Tìm điểm *C* thuộc (*T*) sao cho góc *ACB* lớn nhất.

Anh chị đã biết lời giải bài toán này hay chưa?

Nếu đã biết ☐ Xin viết vắt tắt chứng minh ở tờ giấy kèm theo.

Nếu chưa biết ☐ Xin cho dự đoán về điểm C:…….……

Câu 8. Trong không gian cho hai điểm *A, B* và mặt cầu (*T);* đoạn *AB* ở ngoài mặt cầu (*T);* Tìm điểm *C* thuộc (*T*) sao cho tổng *AC* + *CB* nhỏ nhất.

Anh chị đã biết lời giải bài toán này hay chưa?

Nếu đã biết ☐ Xin viết vắt tắt chứng minh ở tờ giấy kèm theo.

Nếu chưa biết ☐ Xin cho dự đoán về điểm C:……..…

…….

Họ và Tên:……

Xin cảm ơn anh/ chị

PHỤ LỤC 2

PHIẾU ĐIỀU TRA HỌC SINH

Bài toán 1: "Cho đường thẳng d và 2 hai điểm A, B nằm cùng phía đối với đường thẳng d. Tìm điểm M trên đường thẳng d sao cho MA + MB nhỏ nhất"

Em đã biết lời giải bài toán này chưa?

☐ Đã biết ☐ Chưa biết

Bài toán 2: "Cho đường thẳng d và 2 hai điểm A, B nằm cùng phía đối với đường thẳng d. Tìm điểm M trên đường thẳng d sao cho $A\hat{M}B$ lớn nhất"

Câu 1: Em đã biết lời giải bài toán này chưa?

☐ Đã biết ☐ Chưa biết

Câu 2: Nếu em đã biết, thì M là điểm nào?

.....

.....

.....

.....

Câu 3: Nếu em chưa biết, em có dự đoán M là điểm nào? Vì sao?

.....

.....

.....

.....

Bài toán 3: "Cho đường tròn (C) và 2 hai điểm A, B nằm ngoài (C)

a) Tìm điểm M trên (C) sao cho MA + MB nhỏ nhất

b) Tìm điểm M trên (C) sao cho $A\hat{M}B$ lớn nhất"

Em dự đoán M là điểm nào trong trường hợp:

a) .....

b) .....

<u>Bài toán 4</u>: " Trong không gian, cho đường thẳng d và 2 hai điểm A, B, hai đường thẳng AB và d chéo nhau. Tìm điểm M trên d sao cho MA + MB nhỏ nhất.

+ Lời giải: .....

.....

.....

.....

+ Nếu chưa có lời giải, em hãy đoán điểm cần tìm là điểm nào?

.....

.....

<u>Bài toán 5</u>: " Trong không gian, cho mặt cầu (C) và 2 hai điểm A, B ở ngoài mặt cầu. Tìm điểm M trên (C) sao cho MA + MB nhỏ nhất.

+ Lời giải: .....

.....

.....

.....

+ Nếu chưa có lời giải, em hãy đoán điểm cần tìm là điểm nào?

.....

.....

<u>Bài toán 6</u>: " Trong không gian, cho mặt cầu (C) và 2 hai điểm A, B ở ngoài mặt cầu. Tìm điểm M trên (C) sao cho góc AMB lớn nhất.

+ Lời giải: .....

.....

.....

.....

+ Nếu chưa có lời giải, em hãy đoán điểm cần tìm là điểm nào?

.....

PHỤ LỤC 3

PHIẾU XIN Ý KIẾN GIÁO VIÊN VỀ THỰC TRẠNG SỬ DỤNG CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG TRONG DẠY HỌC HÌNH HỌC KHÔNG GIAN Ở TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

(Dùng để khảo sát ý kiến của giáo viên dạy môn Toán ở trường THPT)

Nhằm thực hiện nghiên cứu đề tài "*Dạy học Hình học không gian ở trường THPT với sự hỗ trợ của công nghệ thông tin và truyền thông*", chúng tôi tiến hành lấy ý kiến phản hồi của các thầy/cô về thực trạng sử dụng *công nghệ thông tin và truyền thông* (CNTT) trong DH Hình học không gian (HHKG) ở trường THPT, kính đề nghị các thầy/cô cung cấp các thông tin phản hồi theo mẫu dưới đây:

Giáo viên: ..... Trường:.....

Ngày khảo sát: ..... Năm học:.....

Xin quý thầy cô **tô đậm** vào lựa chọn phù hợp nhất của mình trong các câu hỏi dưới đây theo các mức độ sau:

① **không đồng ý**	② **phân vân**	③ **đồng ý**	④**hoàn toàn đồng ý**

(Ghi chú: ① là mức đánh giá thấp nhất; ④ là mức đánh giá cao nhất)

STT	Các vấn đề xin được hỏi	Chọn phương án trả lời			
I	**Có thể sử dụng CNTT trong dạy học HHKG thông qua những việc sau:**				
1	Trình chiếu một số nội dung bài học thay cho viết bảng	①	②	③	④
2	Trình chiếu hình ảnh để dẫn nhập vấn đề trong bài học	①	②	③	④
3	Trình chiếu video để dẫn nhập vấn đề trong bài học	①	②	③	④
4	Trình chiếu một số hình vẽ, hình ảnh minh họa cho bài học	①	②	③	④
5	Dùng phần mềm có tính động tạo vết minh họa quỹ tích	①	②	③	④
6	Thay đổi hình để thấy điểm cố định của nhóm đối tượng	①	②	③	④

7	Trình chiếu một nhóm kết quả để phát hiện quy luật	①	②	③	④
II	**Bản thân thường xuyên sử dụng CNTT để làm các việc sau trong dạy học HHKG?**				
8	Trình chiếu một số nội dung bài học thay cho viết bảng	①	②	③	④
9	Trình chiếu hình ảnh để dẫn nhập vấn đề trong bài học	①	②	③	④
10	Trình chiếu video để dẫn nhập vấn đề trong bài học	①	②	③	④
11	Trình chiếu một số hình vẽ, hình ảnh minh họa cho bài học	①	②	③	④
12	Dùng phần mềm có tính động tạo vết minh họa quỹ tích	①	②	③	④
13	Thay đổi hình để thấy điểm cố định của nhóm đối tượng	①	②	③	④
14	Trình chiếu một nhóm kết quả để phát hiện quy luật	①	②	③	④
III	**CNTT có thể hỗ trợ tốt cho những hoạt động học tập sau đây:**				
15	Hỗ trợ dự đoán kết quả bài toán	①	②	③	④
16	Hỗ trợ tìm lời giải bài toán	①	②	③	④
17	Hỗ trợ vẽ hình	①	②	③	④
18	Hỗ trợ minh họa quỹ tích, minh họa điểm cố định	①	②	③	④
19	Hỗ trợ quỹ tích, tìm điểm cố định	①	②	③	④
20	Hỗ trợ tạo tình huống có vấn đề	①	②	③	④
21	Hỗ trợ giải quyết vấn đề	①	②	③	④
IV	**Bản thân rất ít khi sử dụng CNTT trong các việc sau**				
22	Trong chuẩn bị bài	①	②	③	④
23	Trong quá trình lên lớp	①	②	③	④
24	Trong đánh giá kết quả học tập của HS	①	②	③	④
25	Trong trình bày một vấn đề trong các hội nghị, hội thảo...	①	②	③	④
26	Trong các hoạt động chuyên môn	①	②	③	④

27	Trong tự học nâng cao trình độ	①	②	③	④
28	Trong trao đổi dạy và học với đồng nghiệp và HS	①	②	③	④

Các ý kiến khác:

……

……

……

……

Chân thành cảm ơn quý thầy/cô!